

UD_LO SVILUPPO DEI SOLIDI

Obiettivi:

Saper rappresentare lo sviluppo di un solido geometrico

Saper costruire un solido geometrico con cartoncino e colla

Saper rappresentare lo sviluppo di un contenitore di cartone.

Disegno di figure geometriche solide

Molti oggetti che utilizziamo quotidianamente hanno la forma di figure geometriche solide e tra questi si rivelano particolarmente significative le scatole, perché costituiscono esempi di solidi che traggono origine da forme geometriche piane.

Lo **sviluppo di un solido** è la superficie che si ottiene riportando su un piano le facce che lo compongono. Per comprendere come si arriva alla costruzione di una scatola occorre immaginarla come se fosse un oggetto costruito di carta e fare il procedimento inverso, cioè smontarla, "aprirla", con il minimo numero possibile di tagli e quindi lo sviluppo di un solido consiste nel distendere su una superficie piana tutte le facce, laterali e di base, del solido. La successiva ricomposizione del solido, partendo dalle facce aperte su un piano, prende il nome di **involuppo** e permetterà alla figura geometrica solida riassumere la sua forma specifica nello spazio.

Per realizzare dei solidi è necessario predisporre delle superfici di attaccatura, dette linguette.

Non tutti i solidi sono sviluppabili esattamente.

Le superfici di alcune figure geometriche solide che possiamo esattamente sviluppare sono i **poliedri regolari convessi**, i **prismi retti**, le **piramidi**, ed alcuni **solidi di rotazione** come il cilindro e tutti i solidi da essi derivati.

Tra i solidi di rotazione, la sfera è sviluppabile in modo approssimativo ed anche la procedura di sviluppo del cono porta a risultati approssimati.

I cinque poliedri regolari convessi

Un poliedro è **regolare** se le facce che lo compongono sono poligoni regolari ed uguali; *convesso* se il piano che contiene una qualsiasi delle sue facce non interseca il solido; è *concavo* in caso contrario.

I poliedri regolari, o *solidi platonici*, sono: il tetraedro, il cubo (detto anche esaedro), l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro (20 facce).

Il teorema del matematico Eulero afferma che "in ogni poliedro convesso il numero delle facce (F) più il numero dei vertici (V) è uguale al numero degli spigoli (S) più 2" (cioè $F+V=S+2$).

Eulero è il nome italianizzato di Leonhard Euler (Basilea 1707-San Pietroburgo 1783), astronomo e filosofo svizzero. La sistematizzazione e la riformulazione dell'analisi che si trova nelle sue opere è alla base della matematica moderna e della teoria delle funzioni.



Nelle costruzioni che seguono è indicato tra parentesi il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce ed in successione le operazioni da eseguire per ottenere lo sviluppo. E' chiaro che si tratta di figure geometriche che devono

essere costruite con riga e compasso: se non lo ricordi è bene andarle a rivedere, pena la cattiva riuscita dello sviluppo e quindi del relativo involuppo.

Non tutti i solidi sono semplici e rapidi da eseguire: i più suggestivi richiedono molta precisione. Non ti demoralizzare comunque ai primi tentativi mal riusciti e ricorda sempre di eseguire delle piccole incisioni, con un cutter poco tagliente, in corrispondenza delle piegature.

Letture:

Solidi Platonici

Se un poligono ha **tutti i lati e tutti gli angoli** uguali possiamo chiamarlo "**poligono regolare**". E' un poligono regolare un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono con angoli e lati uguali, un esagono con il lato uguale al raggio delle circonferenza circoscritta. Per alcuni poligoni, ad esempio l'esagono, è molto semplice la costruzione, per altri, ad esempio il pentagono, la costruzione è molto più complessa.

Anche se la costruzione non sempre è agevole e non sempre si può fare solo con riga e compasso, è però sempre possibile pensare ad un **poligono regolare con n lati**, dove n può esprimere anche un numero molto grande: in altre parole, nel piano non esiste alcun limite al numero delle figure regolari che si possono costruire.

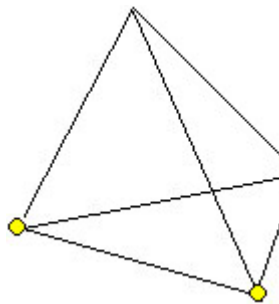
Per lo spazio la situazione è molto diversa. Intanto diciamo che un **poliedro regolare** è:

un solido convesso, racchiuso da facce regolari, tutte tra loro uguali.

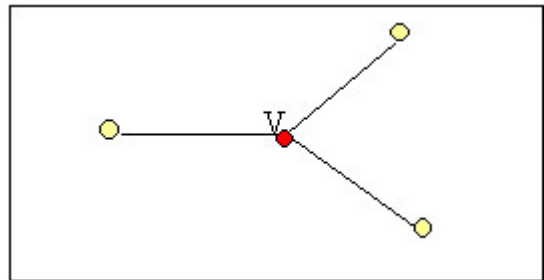
Anche gli angoloidi dovranno essere tutti uguali: per **angoloide** intendiamo la parte di spazio racchiusa da tre o più piani che si intersecano lungo spigoli concorrenti in un vertice.

Per i poliedri c'è però un vincolo che per i poligoni non esiste:

la somma degli angoli che delimitano un angoloide non può raggiungere 360°



Per scoprire l'origine di questo vincolo possiamo usare un'apposita apparecchiatura: prendi una tavoletta di legno, fissa in tre punti non allineati gli estremi di tre elastici. Lega insieme gli altri tre estremi degli elastici, trovando in questo modo il punto V (vedi figura). Sollevando V si può realizzare una piramide con la base fissa e gli angoloidi variabili.



Ora, man mano che ci avviciniamo alla base, si può notare che l'angoloide aumenta così come la somma dei singoli angoli formati dagli spigoli che concorrono in V.

Quando V sta sul piano di base accade che la somma degli angoli vale esattamente 360° però non esiste più la piramide, non si può più parlare di figura solida ma di figura piana. Data questa condizione, si può provare che

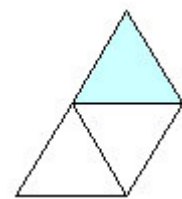
esistono solo 5 poliedri regolari:

il tetraedro, il cubo o esaedro, l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro. Arriveremo alla dimostrazione di quanto affermato.

Attività 0 (Illustrazioni tratte da : *Triangoli - C.S.Ross*; ed SCIENZA)

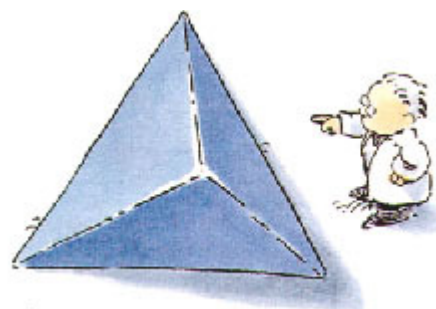
Visto che il poliedro deve essere costruito con facce regolari prendiamo in esame i vari poligoni regolari ed osserviamo che cosa accade.

Partiamo dal triangolo equilatero: ha gli angoli di 60° gradi.



facce triangolari

Possiamo accostare 3 triangoli : $3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$
Costruiamo così un angoloide. Poiché è possibile chiuderlo con un altro triangolo uguale ai precedenti, si può costruire un tetraedro
tetraedro: (da tetra = quattro) infatti è formato in tutto da 4

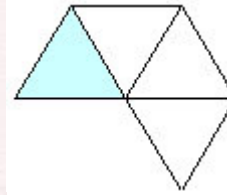


Tetraedro



Ottaedro

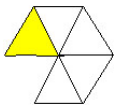
Possiamo accostare 4 triangoli equilateri intorno ad un vertice si avrà : $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$



poliedro regolare: un **ottaedro**.

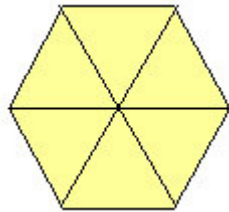
Si può costruire l'angoloide saldando tra loro due lati estremi. Se si chiude con un altro angoloide uguale, utilizzando in tutto 8 triangoli equilateri, si ottiene un solido che facce ed angoloide uguali tra loro ed è quindi un

Possiamo accostare 5 triangoli :
 $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$



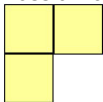
Si può costruire l'angoloide saldando tra loro due lati estremi. Si può chiudere il poliedro utilizzando in tutto 20 triangoli equilateri uguali: si avrà un **icosaedro** (da icos = 20).

Accostando invece 6 triangoli equilateri non è più soddisfatta la condizione che la somma degli angoli deve essere $< 360^\circ$: le facce si "schianano" su un piano.

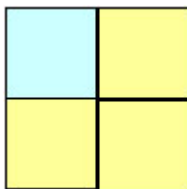


Dunque **non possono esistere altri poliedri regolari con facce triangolari** ad di là dei tre già trovati.

Possiamo ora accostare dei quadrati:



con tre $3 \times 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$
 si ottiene un angoloide che permette poi di costruire un **cubo o esaedro**



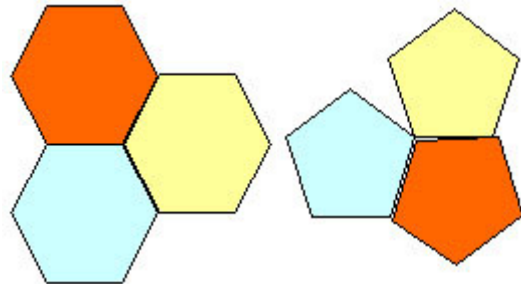
Già quattro quadrati non vanno più bene, perché la somma dei quattro angoli che concorrono in un vertice è uguale a 360° : si rimane così nel piano.



Possiamo usare dei pentagoni:

la somma degli angoli interni di un pentagono regolare è data da $(n-2) \cdot 180^\circ$ con $n = 5$ dunque ogni angolo interno misura 108°

così tre angoli misurano : $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$



Si ottiene un **dodecaedro**.

Ma con quattro pentagoni la somma supera 360° .

Con tre esagoni la situazione si presenta in questo modo:

ogni angolo interno misura 120°

Accostando tre esagoni si realizza un angolo di 360° . Questo non ci permette di uscire dal piano.

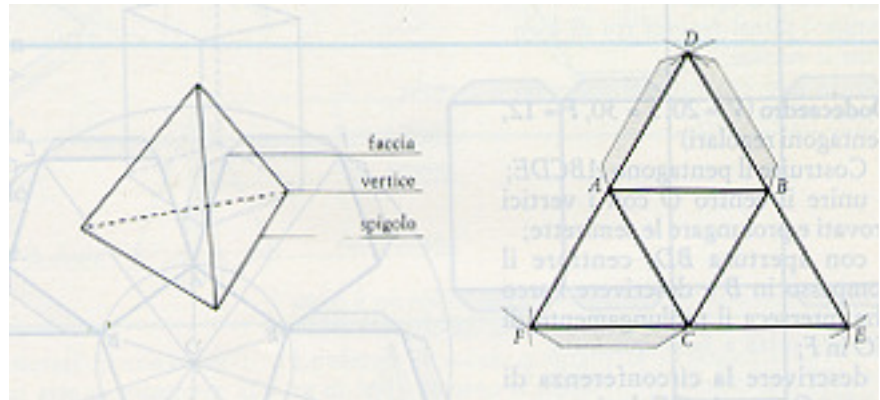
Non è possibile nessuna altra costruzione, con nessun altro poligono regolare. Infatti gli angoli interni dei poligoni regolari con più di 6 lati risulteranno maggiori di 120° . Poiché per costruire un angoloide occorrono almeno tre di tali poligoni, la somma degli angoli che delimitano l'angoloide sarebbe maggiore di 360° , mentre la condizione per poter costruire un solido (convesso) è che tale somma sia minore di 360° .

In tutto quindi non si possono avere che cinque poliedri regolari.

Tetraedro ($V=4$, $S=6$, $F=4$ triangoli equilateri)



Scultura di Arnaldo Pomodoro
Tetraedro



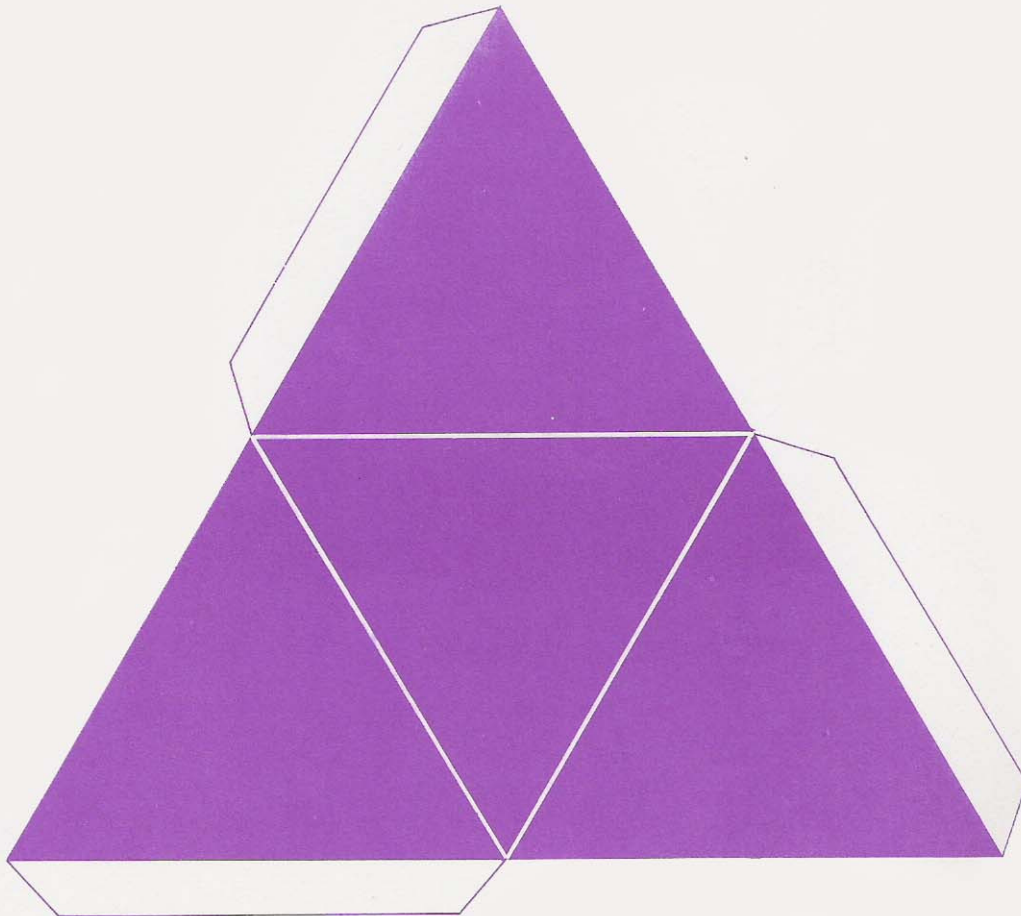
Lo sviluppo è un triangolo equilatero di lato doppio di quello del tetraedro.

Costruisci un triangolo equilatero ABC;

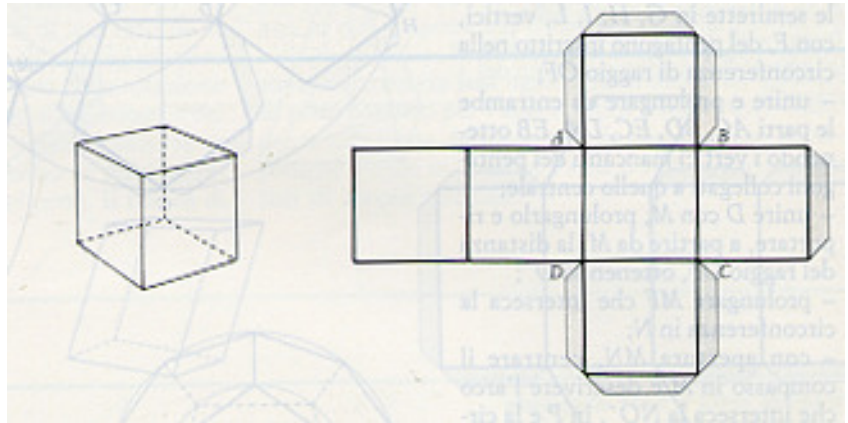
Con apertura uguale al lato, centra il compasso in A e poi in B e descrivi due archi di circonferenza che si intersecano in D; unisci A con D e B con D.

Con apertura uguale al lato, centra il compasso in A e poi in C e descrivi due archi di circonferenza che si intersecano in F; unisci A con F e C con F.

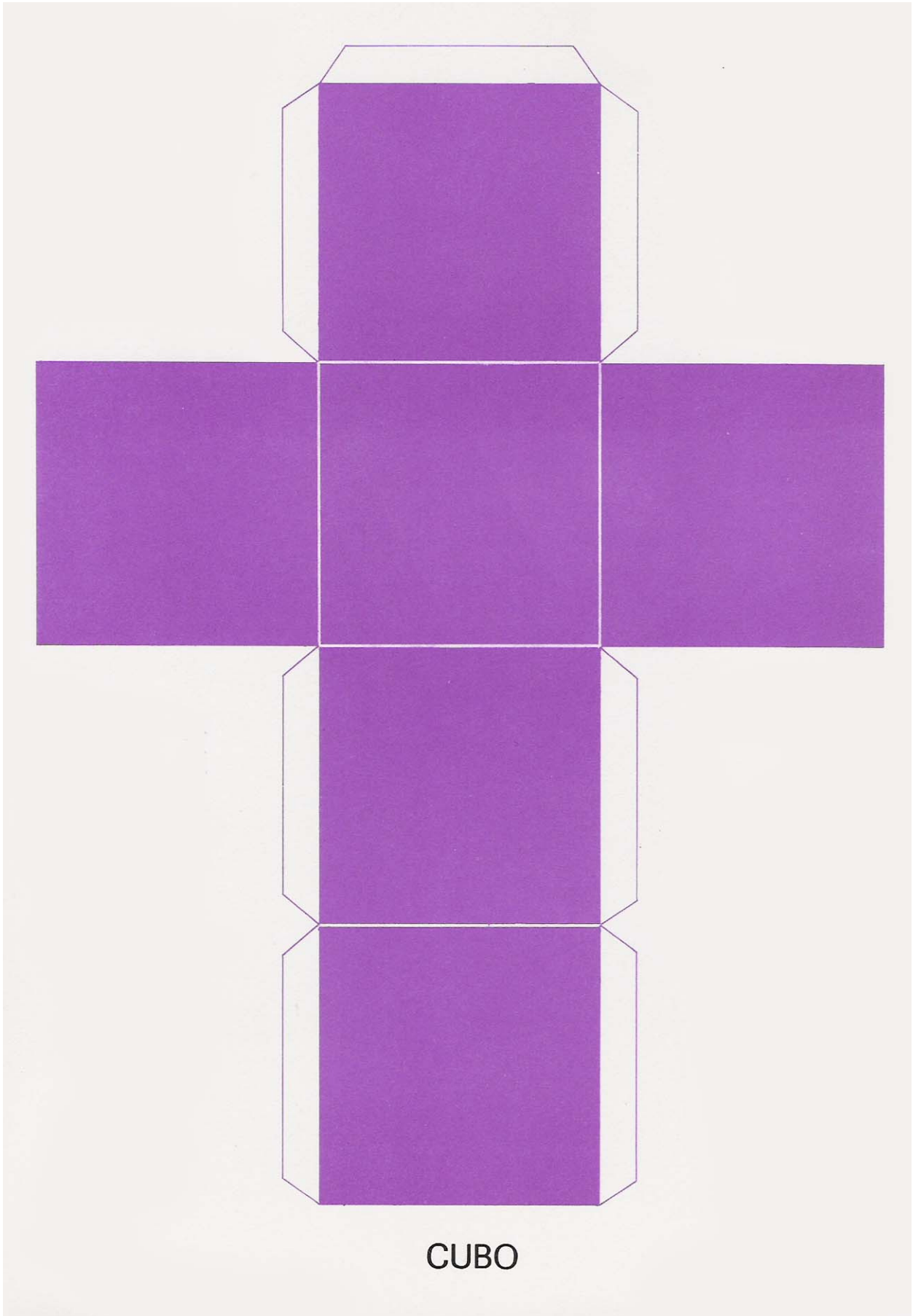
Con apertura uguale al lato, centra il compasso in B e poi in C e descrivi due archi di circonferenza che si intersecano in E; unisci B con E e C con E.



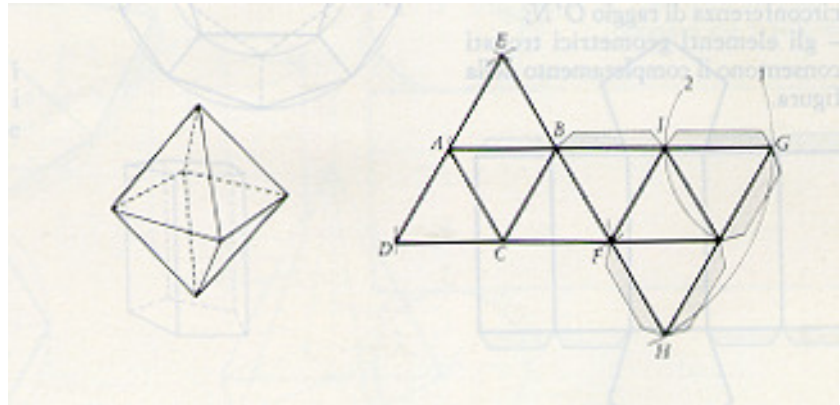
TETRAEDRO

Cubo o Esaedro ($V=8$, $S=12$, $F=6$ quadrati)

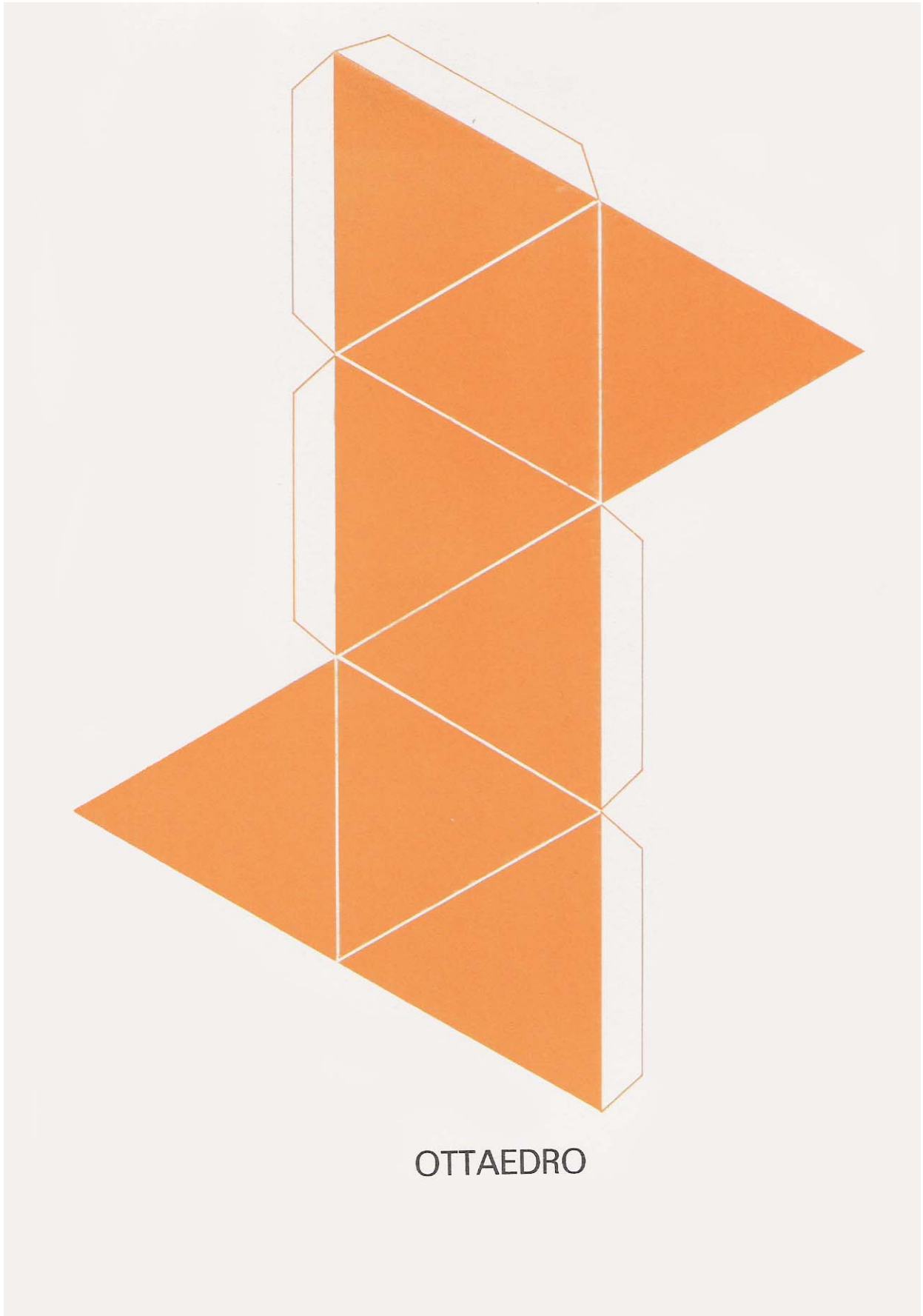
Costruisci il quadrato ABCD;
prolunga i lati e su di essi, con il compasso, riporta la misura del lato, quindi traccia le parallele per i punti trovati.



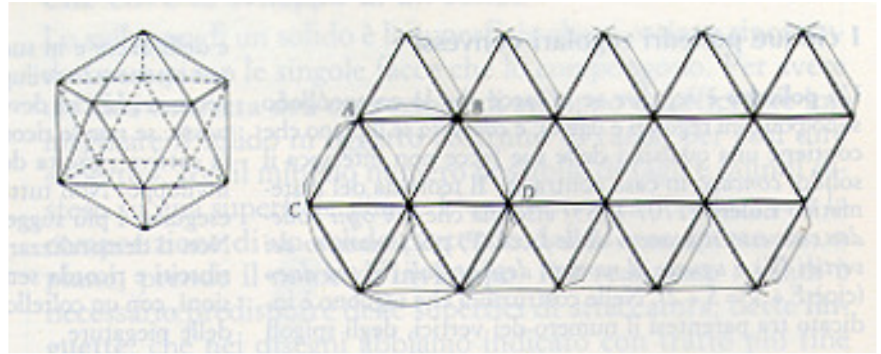
Ottaedro ($V=6$, $S=12$, $F=8$ triangoli equilateri)



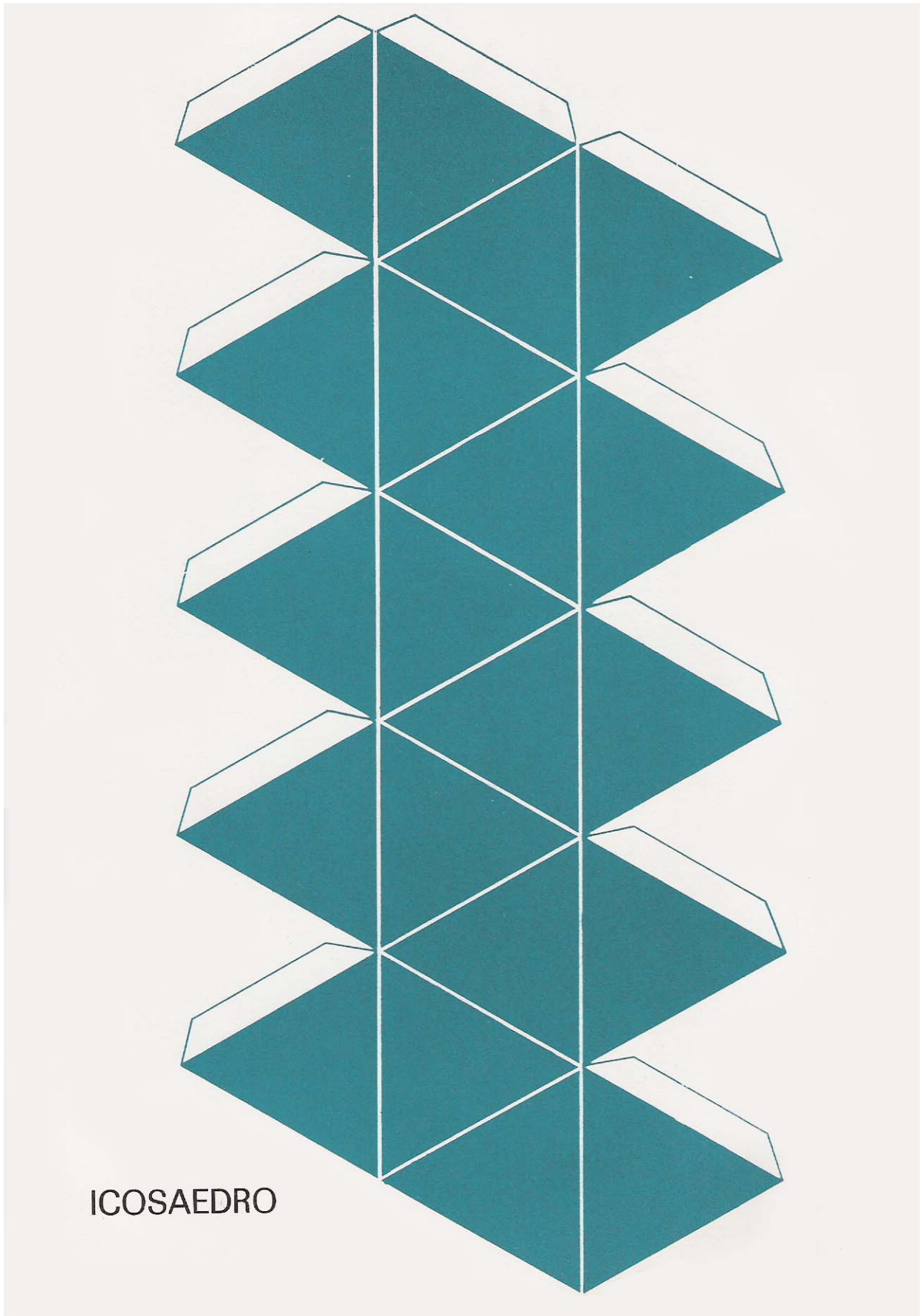
Costruisci il triangolo equilatero ABC e raddoppialo come hai già fatto per lo sviluppo del tetraedro, ottenendo DEF;
 Prolunga il lato AB dalla parte di B ed il lato EF dalla parte di F;
 Con apertura del compasso DE, centra in B e descrivi l'arco 1, determinando G ed H;
 Unisci G con H;
 Con apertura AB, centra il compasso in G e descrivi l'arco 2, determinando I ed L;
 Unisci i punti trovati, ottenendo così lo sviluppo ricercato



Icosaedro ($V=12$, $S=30$, $F=20$ triangoli equilateri)



- Traccia la circonferenza di raggio uguale al lato del triangolo equilatero di base;
- Dividi la circonferenza in 6 parti uguali;
- Prolunga i lati AB e CD riportando il lato del triangolo equilatero come indicato in figura;
- Costruisci i triangoli mancanti utilizzando i punti trovati.



ICOSAEDRO

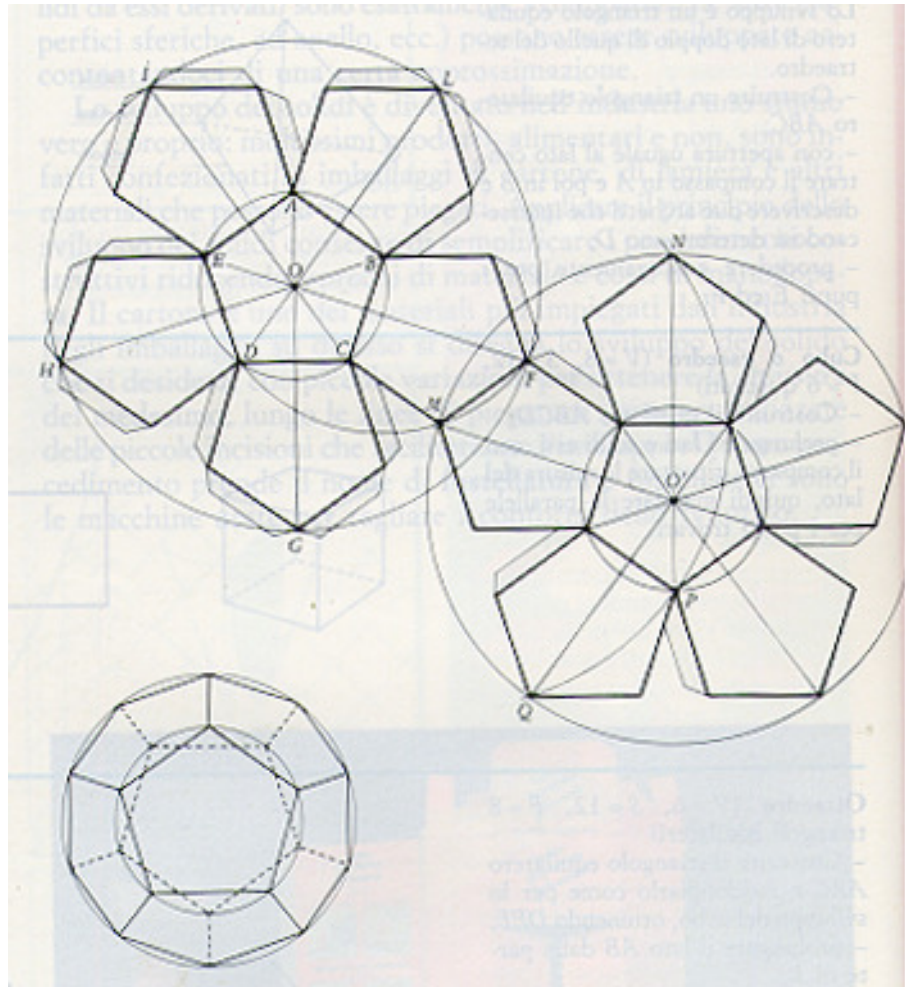
Dodecaedro ($V=20$, $S=30$, $F=12$ pentagoni regolari)



L'Astronave Terra (1982), costruita a forma di icosaedro, da Walt Disney ad Epcot, Florida.



Il Géode è uno straordinario edificio a forma sferica situato vicino Parigi. Ospita 4 sale cinematografiche.



Costruisci il pentagono ABCDE;

Unisci il centro O con i vertici e prolunga le semirette;

Con apertura del compasso BD, centra il compasso in B e descrivi l'arco di circonferenza che interseca il prolungamento EO in F;

Descrivi la circonferenza di centro O e raggio OF che interseca le semirette in G, H, I, L, vertici, con F, del pentagono inscritto nella circonferenza di raggio OF;

Unisci e prolunga da entrambe le parti AC, BD, EC, DA ed EB ottenendo i vertici mancanti dei pentagoni collegati a quello centrale;

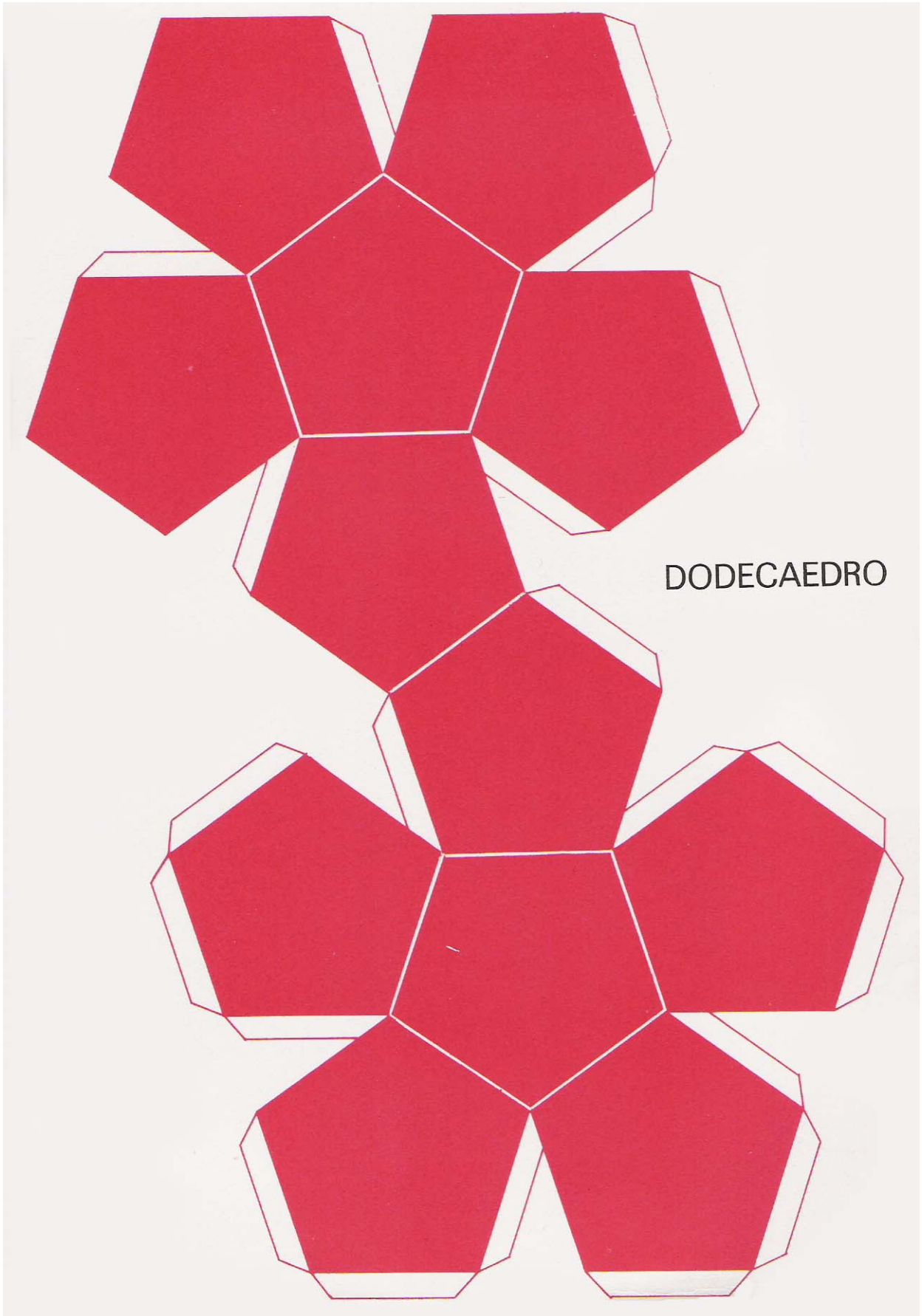
Unisci D con M, prolungali e riporta, a partire da M, la distanza del raggio OF, ottenendo O';

prolunga MF che interseca la circonferenza in N;

con apertura MN, centra il compasso in M e descrivi l'arco che interseca la NO', in P e la circonferenza in Q: O'P è il raggio della circonferenza interna, MQ il lato del pentagono inscritto nella circonferenza di raggio O'N;

gli elementi geometrici trovati consentono il completamento della figura.

Per Platone il dodecaedro è il più bello tra i poliedri, perciò l'universo ha la sua forma. Nel Fedone, Socrate, poco prima di bere la cicuta, dice: "L'universo e la Terra hanno la forma di una palla con dodici facce colorate, di forma pentagonale e i corpi celesti sono sospesi all'interno".



I prismi.

I prismi sono poliedri che hanno per basi due poligoni uguali posti su piani paralleli e per facce laterali tanti *parallelogrammi* quanti sono i lati di base. A seconda che le basi siano formate da triangoli, quadrilateri, pentagoni, esagoni, ecc., il prisma si chiamerà triangolare, quadrangolare, pentagonale, ecc.

Se le basi del prisma sono perpendicolari alle facce laterali, il **prisma si dice retto**, in caso contrario si dice *obliquo*.

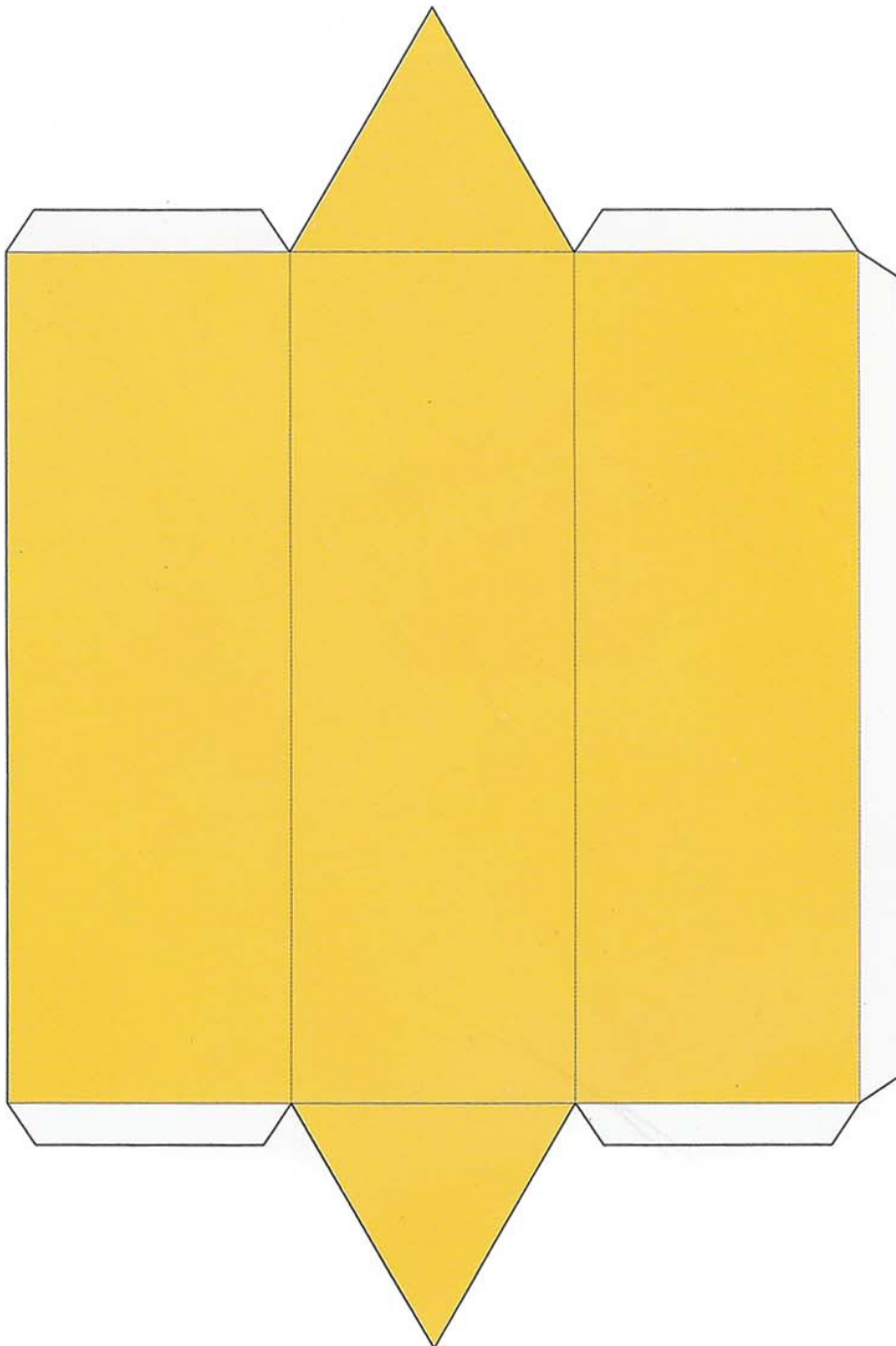
Un prisma si definisce *regolare* se le basi sono costituite da poligoni regolari.

I *parallelepipedi* sono particolari prismi le cui facce sono 6 parallelogrammi.

Prisma retto a base triangolare ($V=6$, $S=9$, $F=5$)



Esempio di edificio a forma di prisma retto a base triangolare regolare è il *Flatiron Building di New York*, uno dei primi grattacieli.

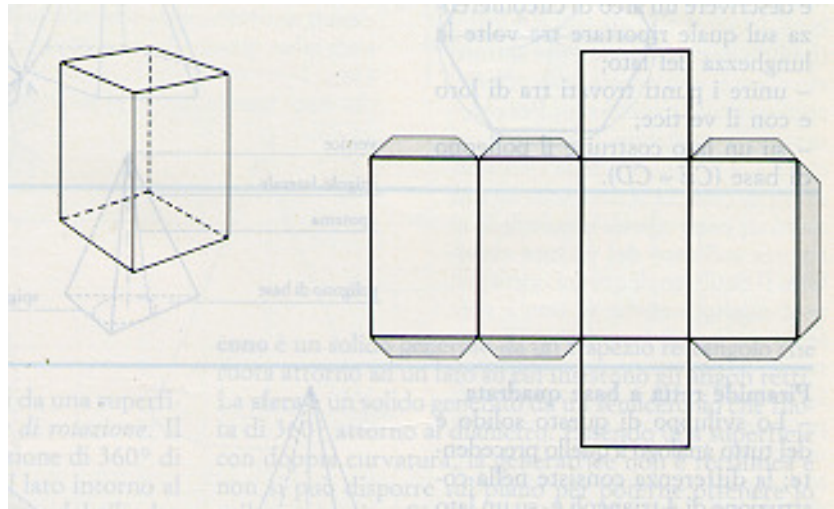


PRISMA RETTO A BASE TRIANGOLARE EQUILATERA

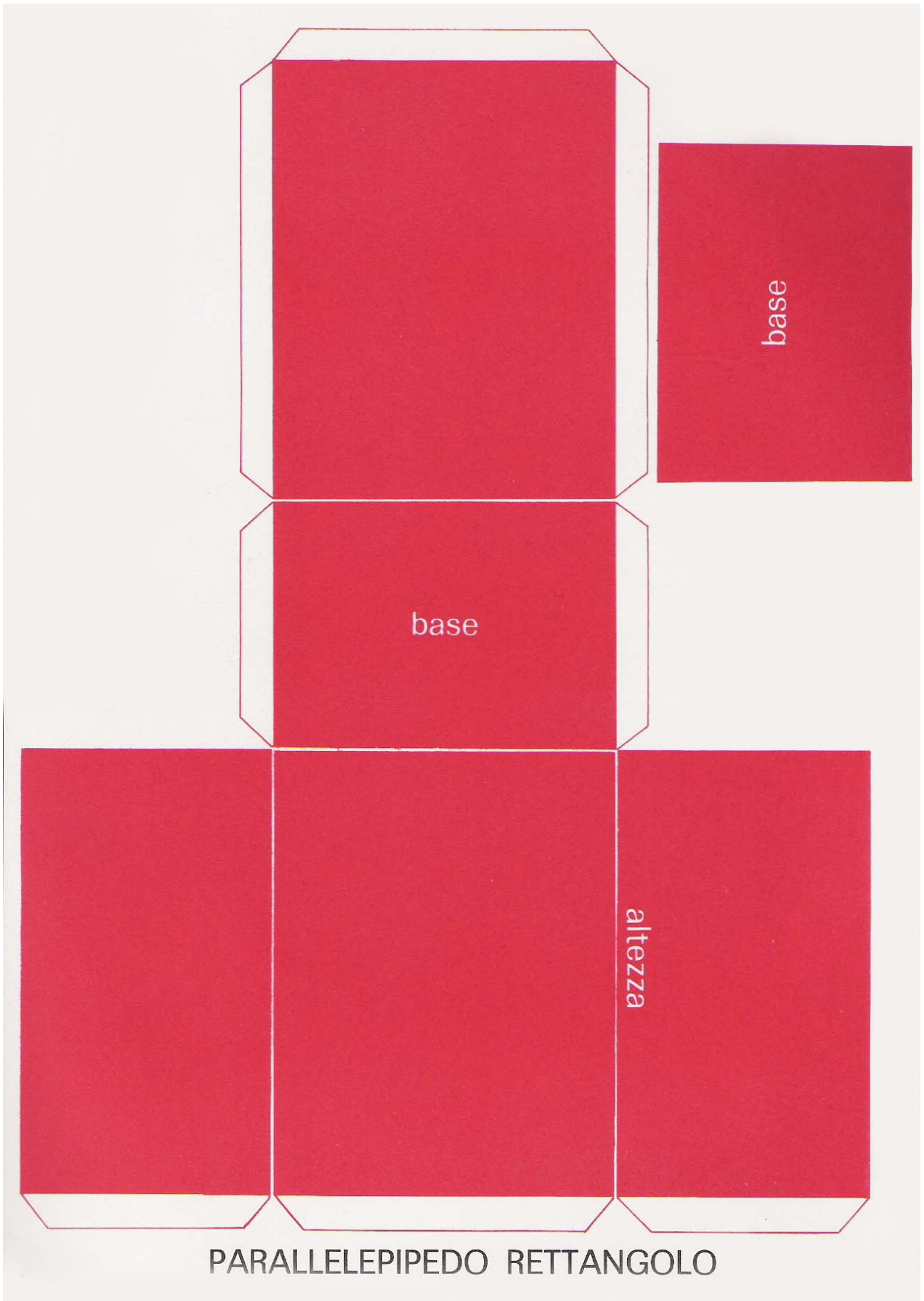
Prisma retto a base quadrata/rettangolare ($V=8$, $S=12$, $F=6$)

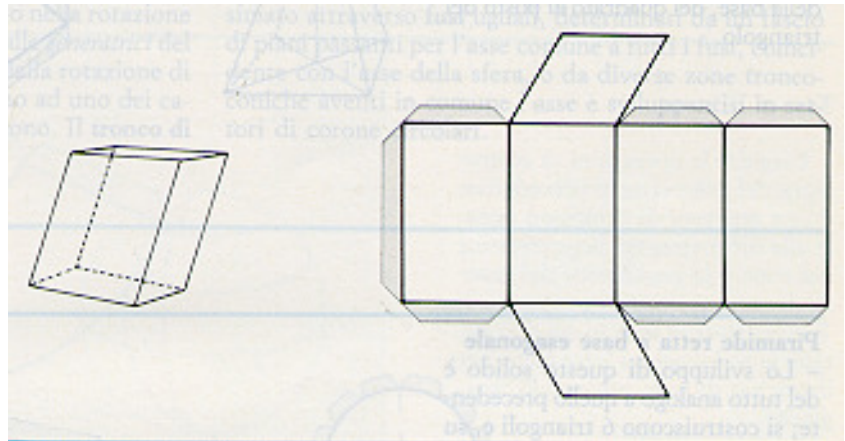


Esempio di edificio a forma di parallelepipedo retto a base rettangolare è il *Palazzo delle Nazioni Unite di New York*.



Traccia due rette parallele di distanza uguale all'altezza del solido;
sulle parallele riporta 4 volte la misura del lato del quadrato, e traccia le
perpendicolari ottenendo lo sviluppo delle 4 facce laterali;
disegna i 2 quadrati/rettangoli di base.



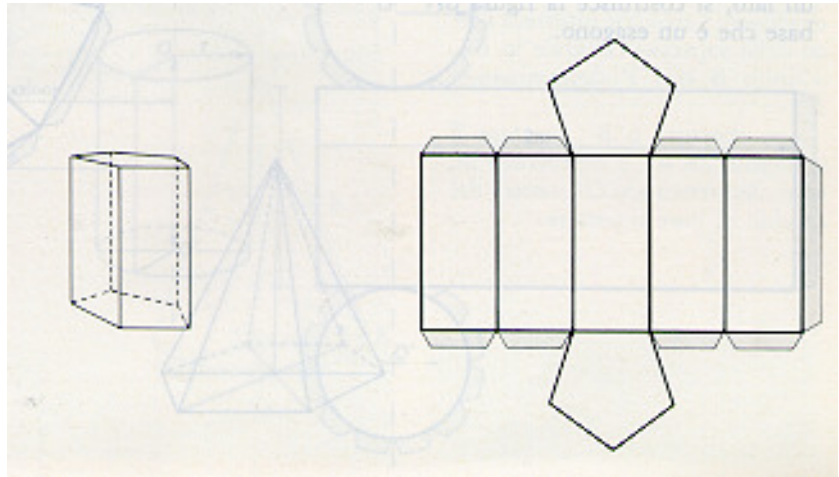
Parallelepipedo retto a base rombica ($V=8$, $S=12$, $F=6$)

Traccia due rette parallele di distanza uguale all'altezza del solido;
sulle parallele riporta 4 volte la misura del lato del quadrato, e traccia le
perpendicolari ottenendo lo sviluppo delle 4 facce laterali;
disegna i 2 rombi di base come indicato in figura.

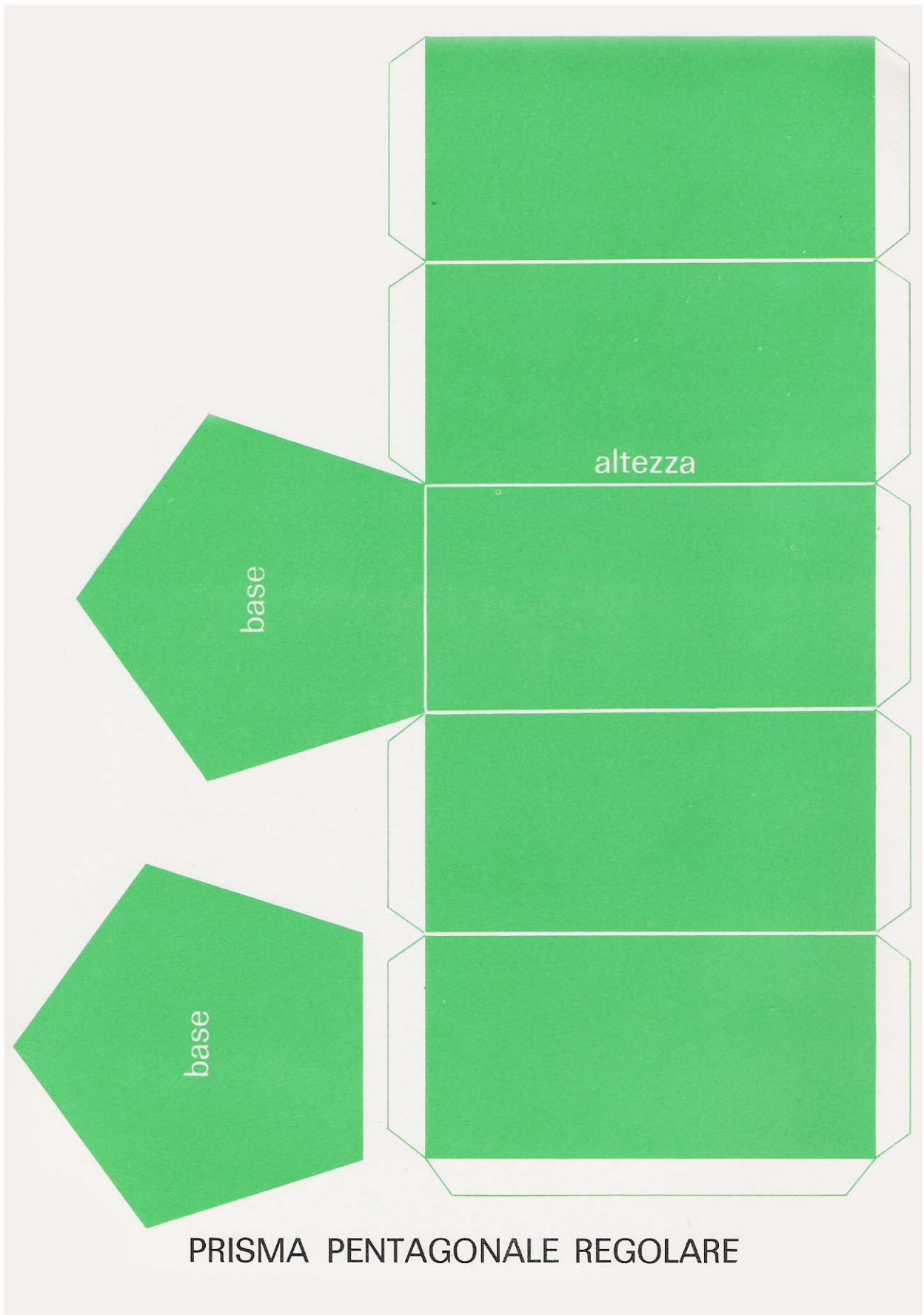
Prisma pentagonale regolare ($V=10$, $S=15$, $F=7$)



Esempio di edificio a forma di parallelepipedo retto a base rettangolare è il *Pentagono, Washington*.



Traccia due rette parallele di distanza uguale all'altezza del solido;
 sulle parallele riporta 5 volte la misura del lato del pentagono e traccia le
 perpendicolari ottenendo lo sviluppo delle 5 facce laterali;
 disegna i 2 pentagoni di base di lato uguale alle basi dei rettangoli, come
 indicato in figura.



Le piramidi

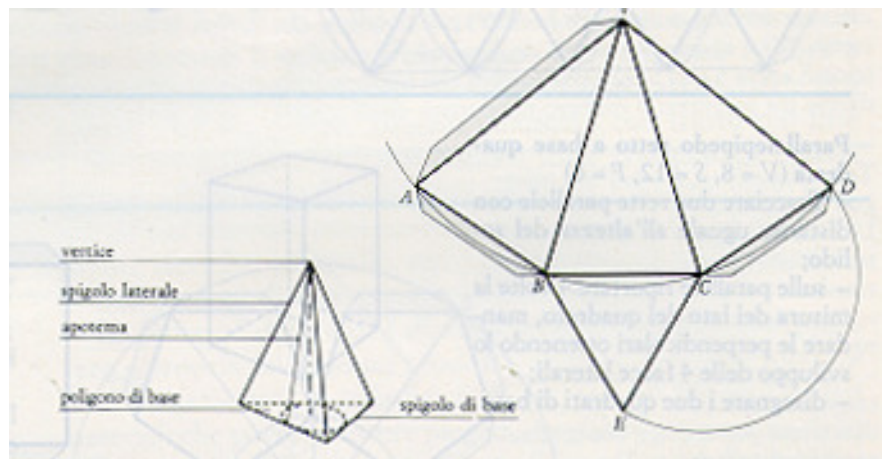
La **piramide** è un poliedro che ha per base un poligono e per facce tanti triangoli uguali e consecutivi quanti sono i lati del poligono di base. Il punto in comune ai triangoli si chiama *vertice*. La distanza del vertice dal piano del poligono di base è l'altezza.

La piramide è *retta* quando nel poligono di base si può inscrivere una circonferenza e l'altezza cade nel centro della circonferenza.

Se il poligono di base è regolare, la piramide si dice *regolare*.

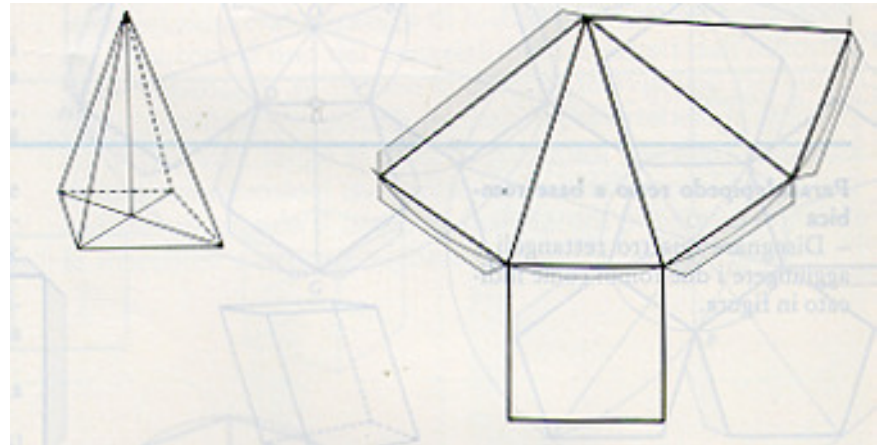
Se il poligono di base non è regolare o l'altezza non cade nel centro della circonferenza inscritta, la piramide è detta *obliqua*.

L'altezza di una qualsiasi faccia triangolare si dice *apotema*.

Piramide retta a base triangolare ($V=5$, $S=7$, $F=4$)

Con apertura del compasso VA pari allo spigolo, centra il compasso in V e descrivi un arco di circonferenza sul quale riportare 3 volte la lunghezza del lato;
 unisci i punti trovati tra loro e con il vertice;
 su un lato, costruisci il poligono di base ($CE=CD$).

Piramide retta a base quadrata ($V=6$, $S=9$, $F=5$)



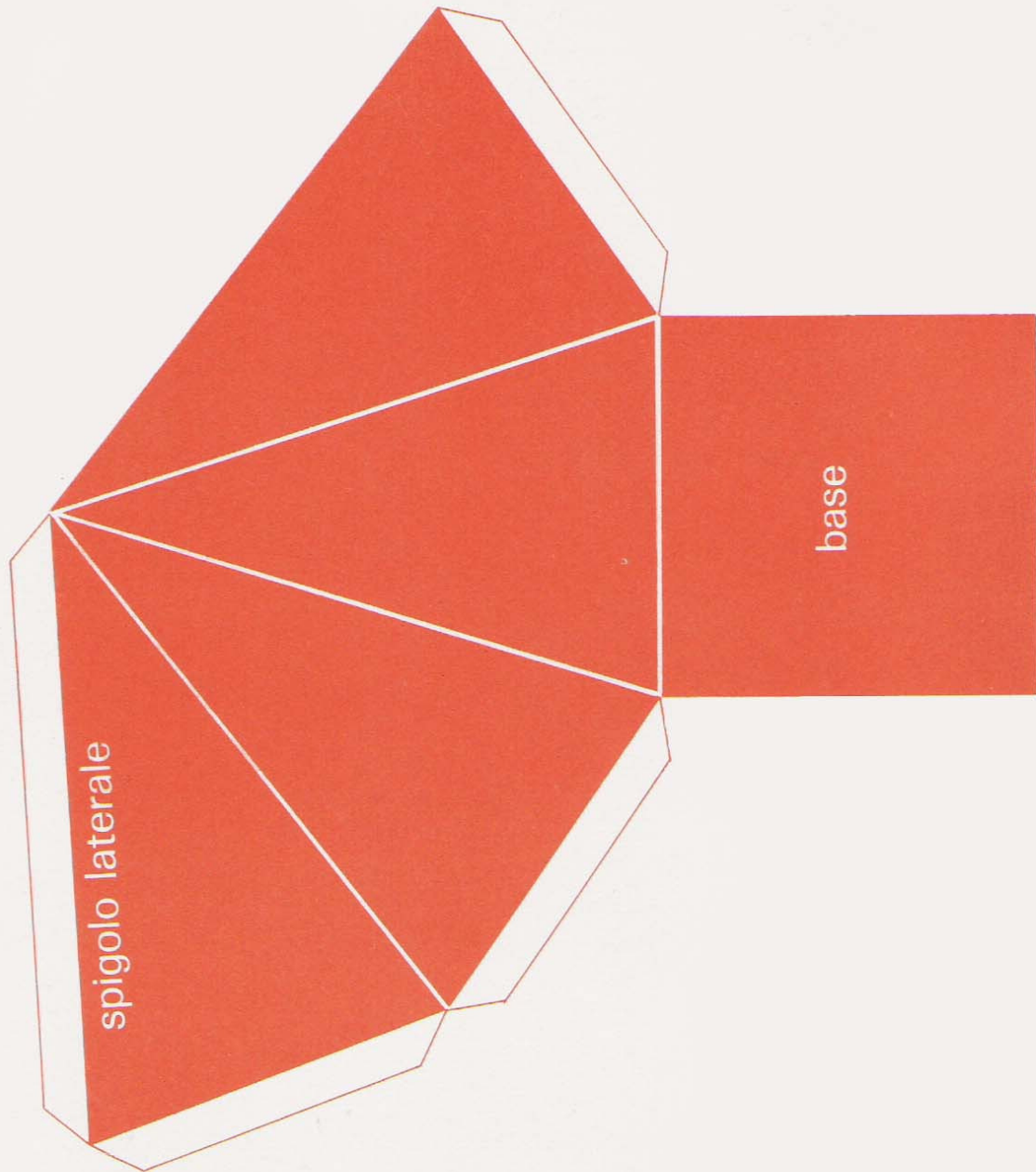
Esempio di edificio a forma di piramide retta a base quadrata è la Transamerica Tower di San Francisco.

Il procedimento che segue ti permetterà di realizzare piramidi di base quadrata.

Con apertura del compasso VA pari allo spigolo, centra il compasso in V e descrivi un arco di circonferenza sul quale riportare 4 volte la lunghezza del lato;

unisci i punti trovati tra loro e con il vertice;

su un lato, costruisci il quadrato di base.



PIRAMIDE QUADRANGOLARE REGOLARE

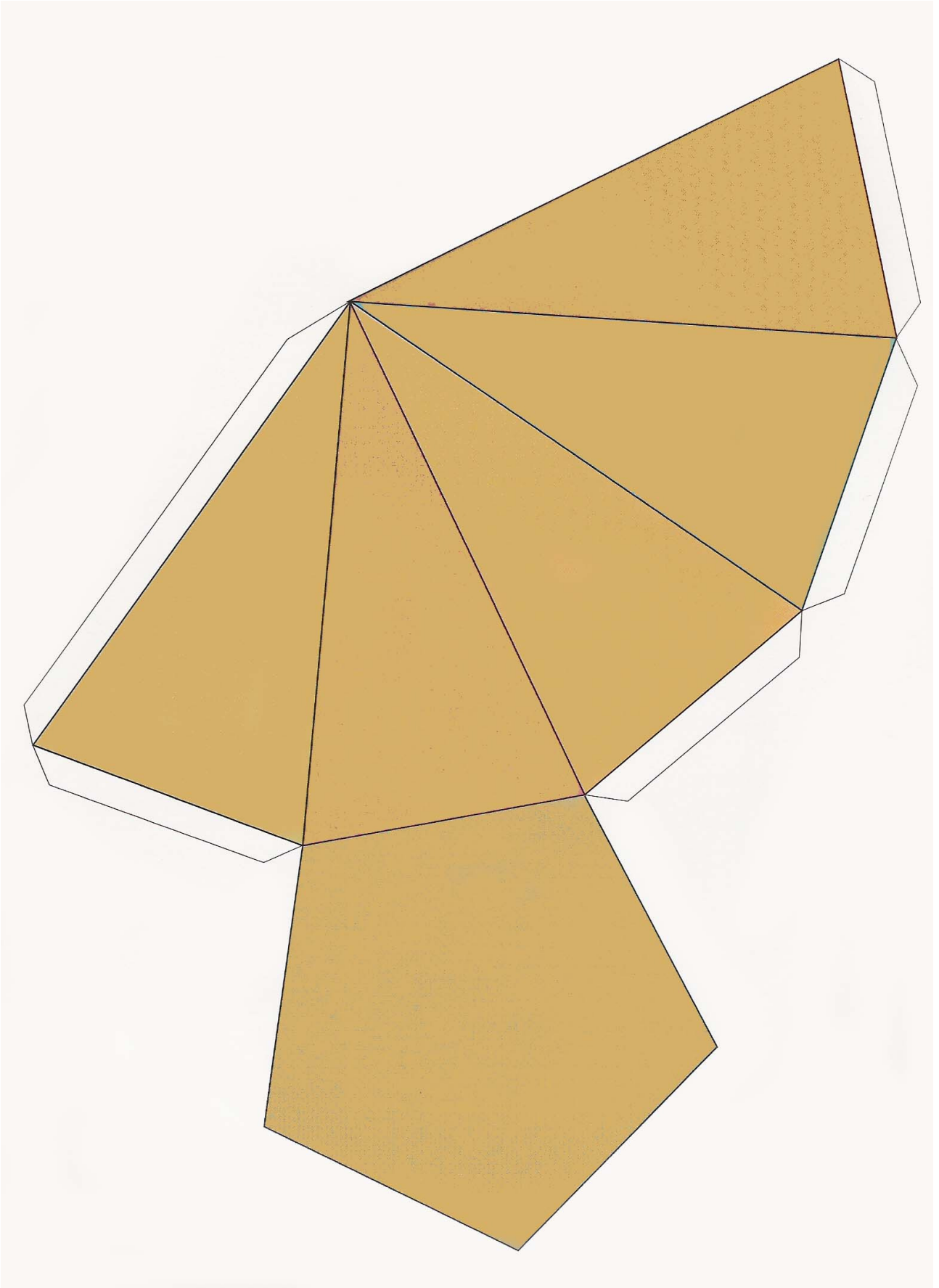
Piramide retta a base pentagonale ($V=7$, $S=11$, $F=6$)

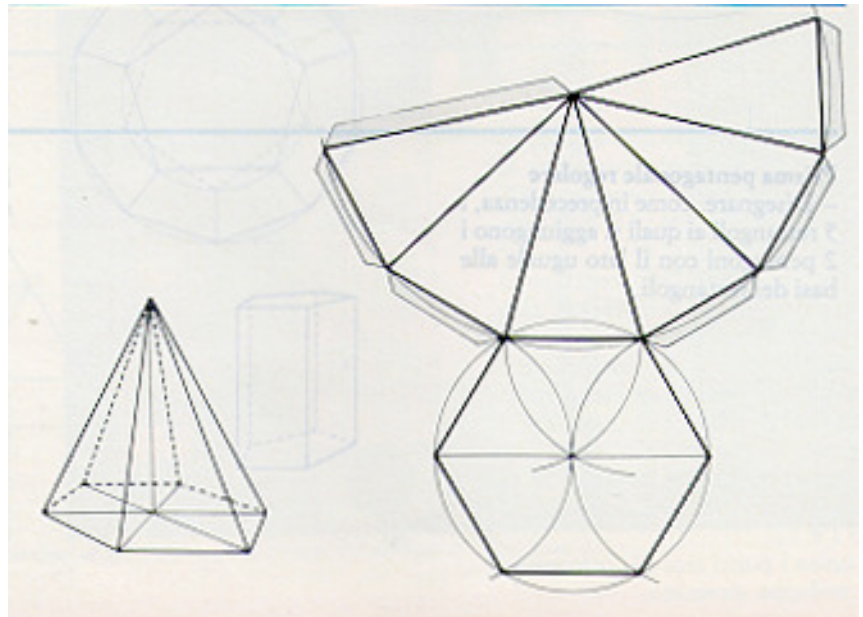
Il procedimento che segue ti permetterà di realizzare piramidi di base pentagonale.

Con apertura del compasso VA pari allo spigolo, centra il compasso in V e descrivi un arco di circonferenza sul quale riportare 5 volte la lunghezza del lato;

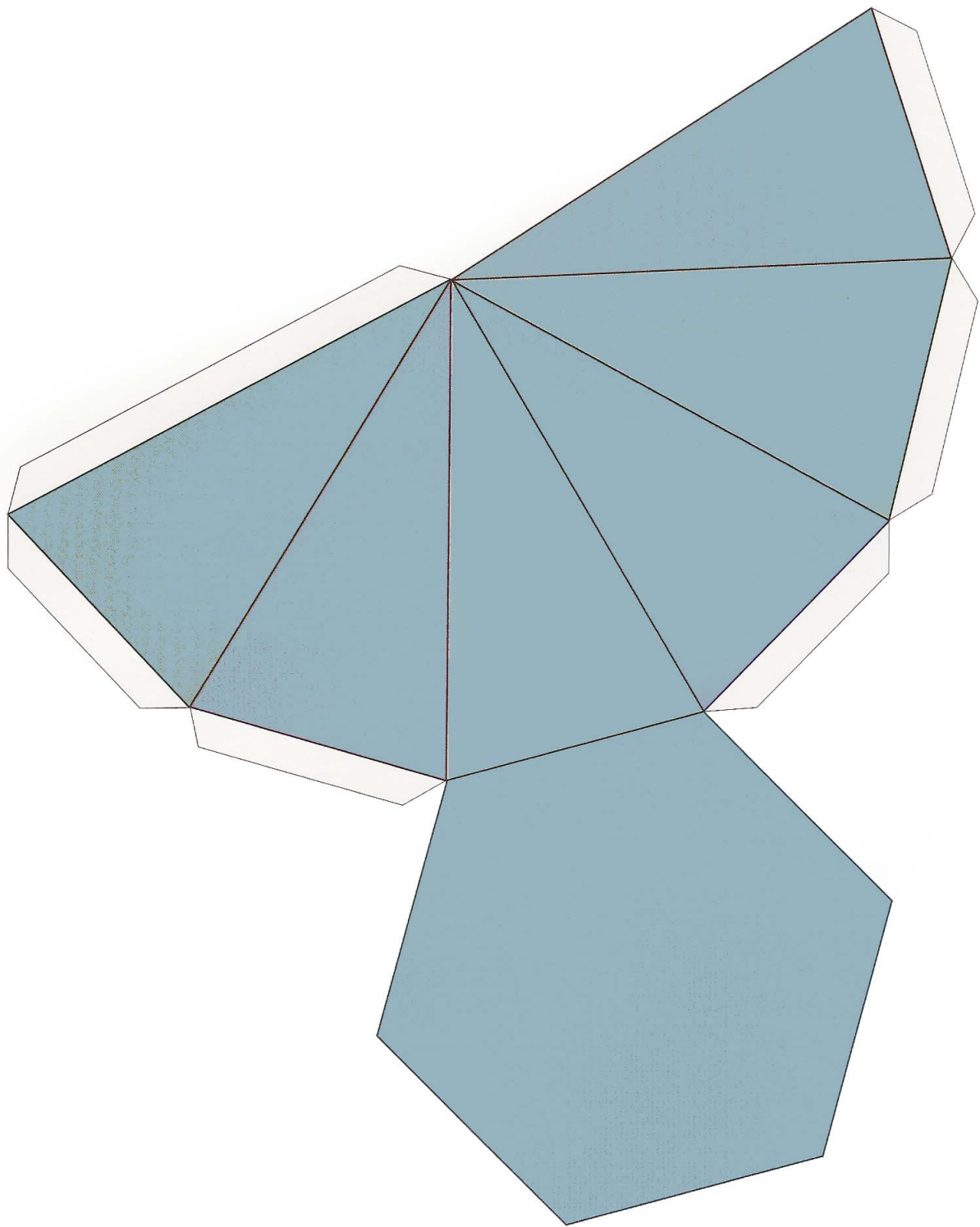
unisci i punti trovati tra loro e con il vertice;

su un lato, costruisci il pentagono di base.

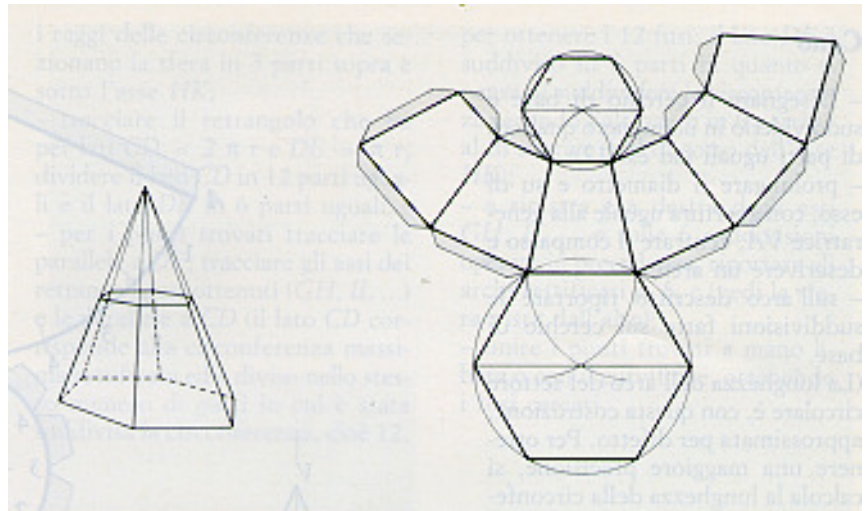


Piramide retta a base esagonale ($V=7$, $S=12$, $F=7$)

Con apertura del compasso VA pari allo spigolo, centra il compasso in V e descrivi un arco di circonferenza sul quale riportare 6 volte la lunghezza del lato;
unisci i punti trovati tra loro e con il vertice;
su un lato, costruisci l'esagono di base.



Piramide retta tronca a base esagonale ($V=12$, $S=18$, $F=8$)



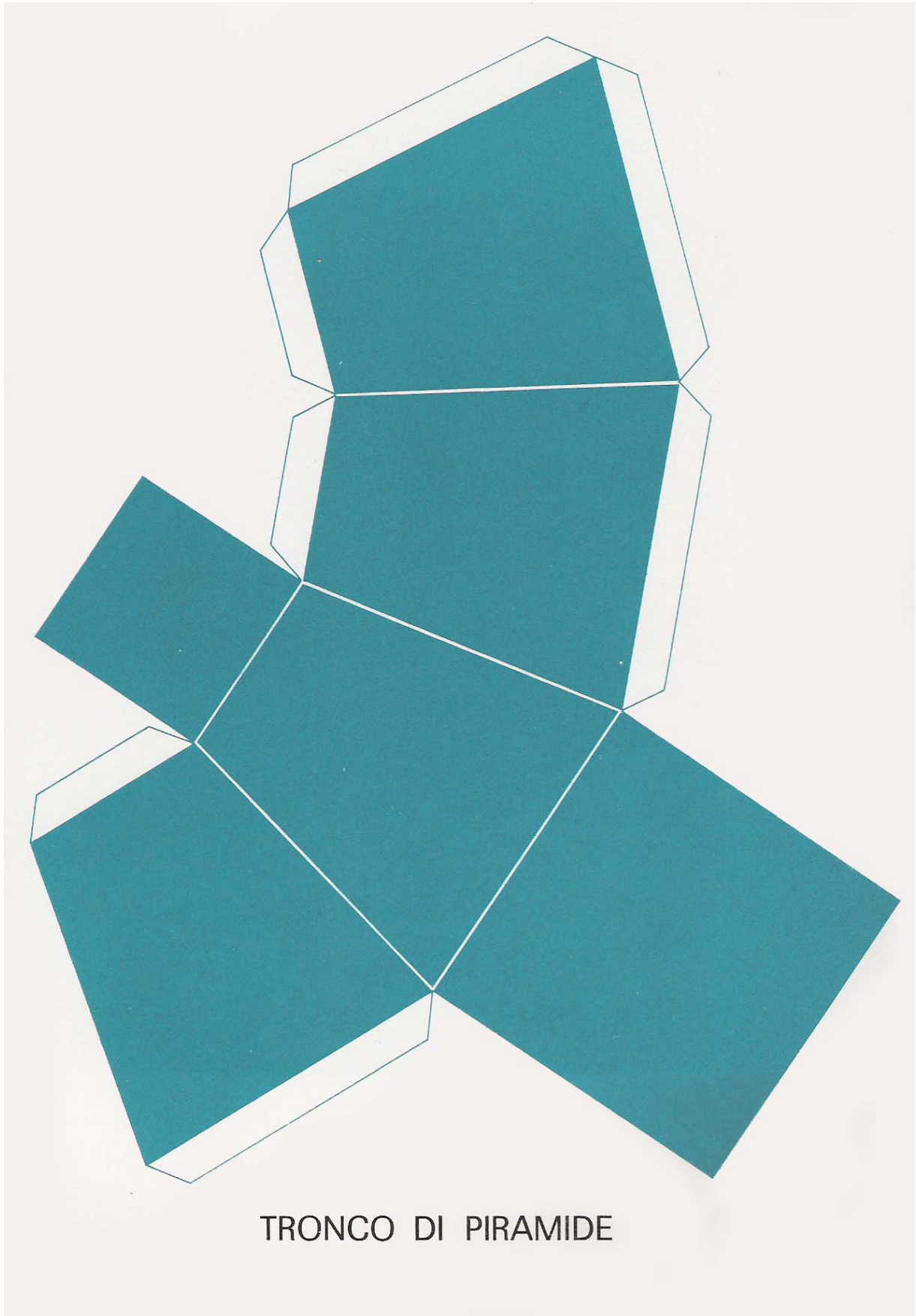
Con apertura del compasso VA pari allo spigolo, centra il compasso in V e descrivi un arco di circonferenza sul quale riportare 6 volte la lunghezza del lato;
 unisci i punti trovati tra loro e con il vertice;
 su un lato, costruisci l'esagono di base;
 centra adesso il compasso in V e con apertura uguale alla differenza tra lo spigolo della piramide e lo spigolo del tronco, descrivi un arco che interseca gli spigoli della piramide completa determinando i punti cercati;
 costruisci un esagono su un lato della base superiore.

Esercizio.

Prendi spunto dalla costruzione della piramide retta tronca a base esagonale ed individua la costruzione del tronco di piramide a base quadrata.



Tronco di piramide a base quadrata



TRONCO DI PIRAMIDE

I solidi di rotazione

I *solidi di rotazione* sono quelle figure geometriche originarie dalla rotazione di una figura geometrica piana intorno ad un asse detto *asse di rotazione*.

Il **cilindro** è il solido generato dalla rotazione di 360° di un rettangolo intorno ad un suo lato. Il lato intorno al quale ruota il rettangolo appartiene all'asse del cilindro e ne costituisce l'altezza; il lato opposto nella rotazione assume infinite posizioni dando luogo alle *generatrici* del cilindro.

Il **cono** nasce dalla rotazione di 360° di un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti. L'ipotenusa è la generatrice del cono.

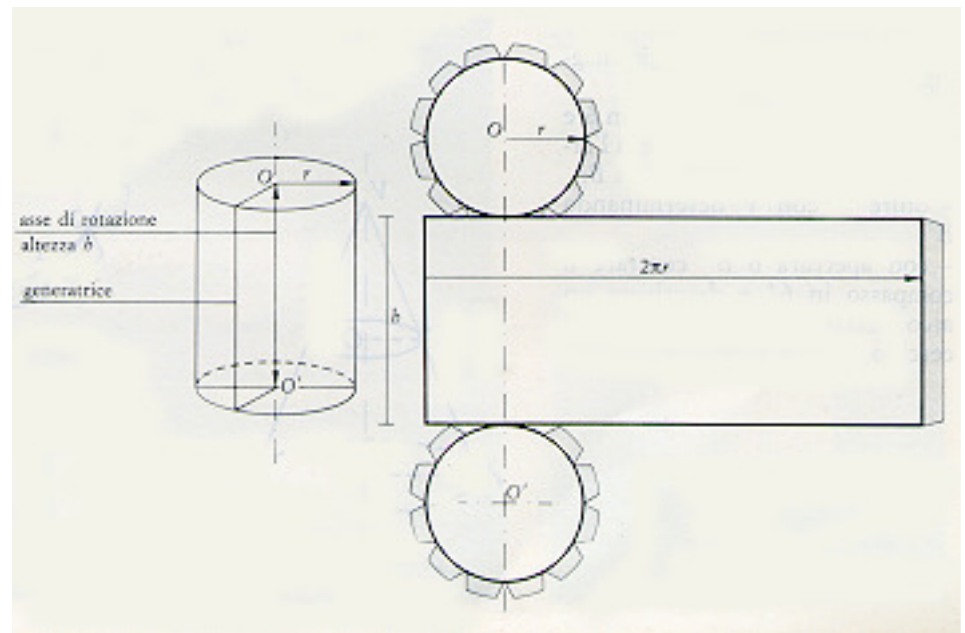
Il **tronco di cono** è un solido generato dalla rotazione di un trapezio rettangolo attorno ad uno dei suoi lati su cui insistono gli angoli retti.

La **sfera** è il solido generato dalla rotazione di 360° di un semicerchio intorno al suo diametro. Essendo una superficie con doppia curvatura, la generatrice non è rettilinea e non si può disporre sul piano per poterne ottenere lo sviluppo preciso. Si ricorre quindi allo sviluppo approssimato attraverso fusi uguali, determinati da un fascio di piani passanti per l'asse comune a tutti i fusi, coincidente con l'asse della sfera o da diverse zone tronco coniche aventi in comune l'asse e sviluppatasi in settori di corone circolari.

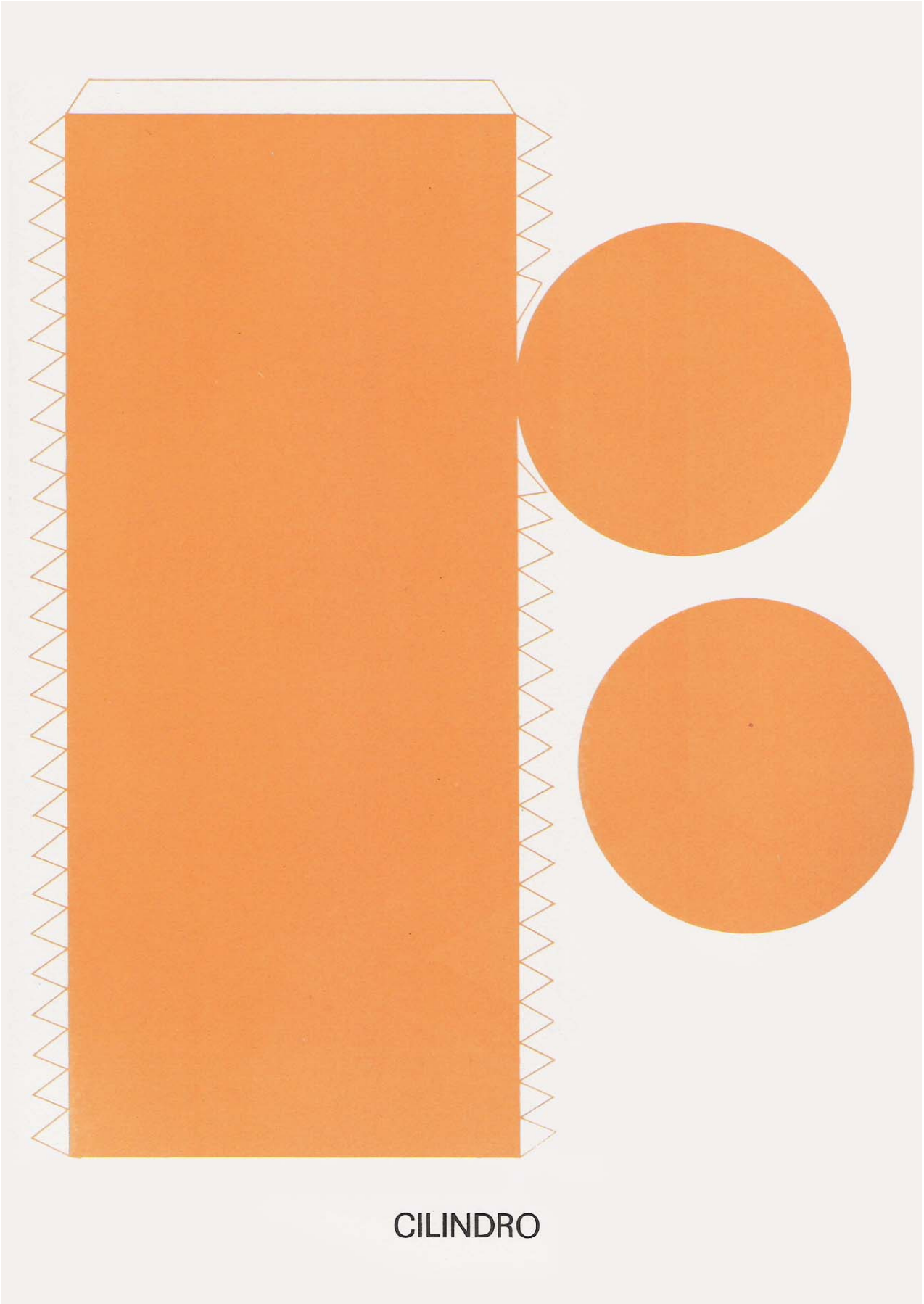
Cilindro



Esempio di edificio a struttura cilindrica è il *Capitol Records Building di Hollywood in California*.

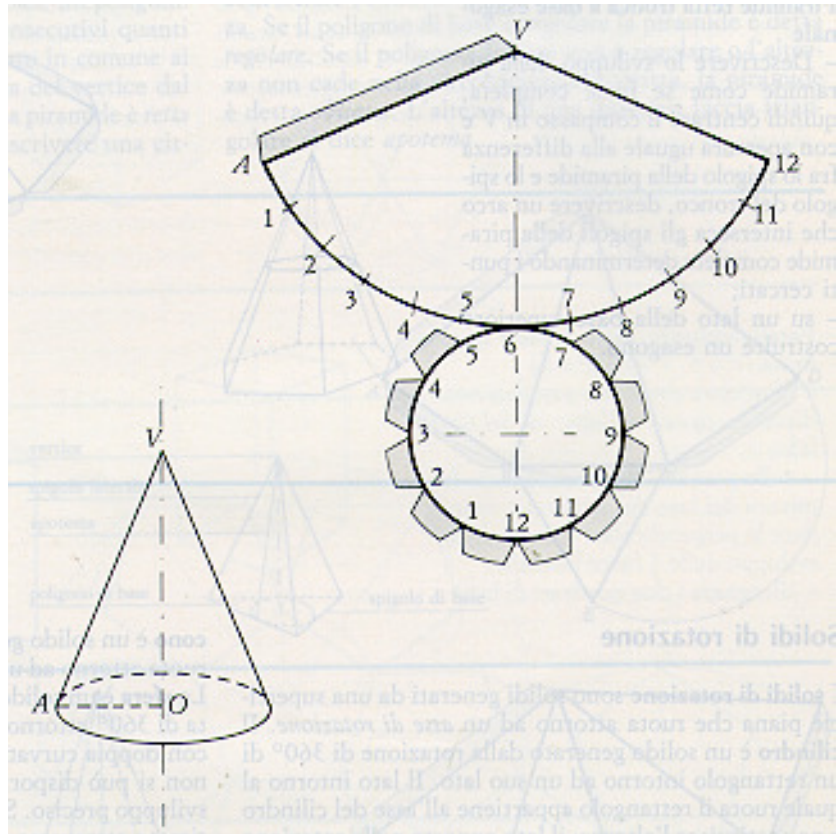


Lo sviluppo del cilindro è costituito da due cerchi e da un rettangolo che ha base uguale alla circonferenza ($2\pi r$) e l'altezza uguale a quella del cilindro.



CILINDRO

Cono

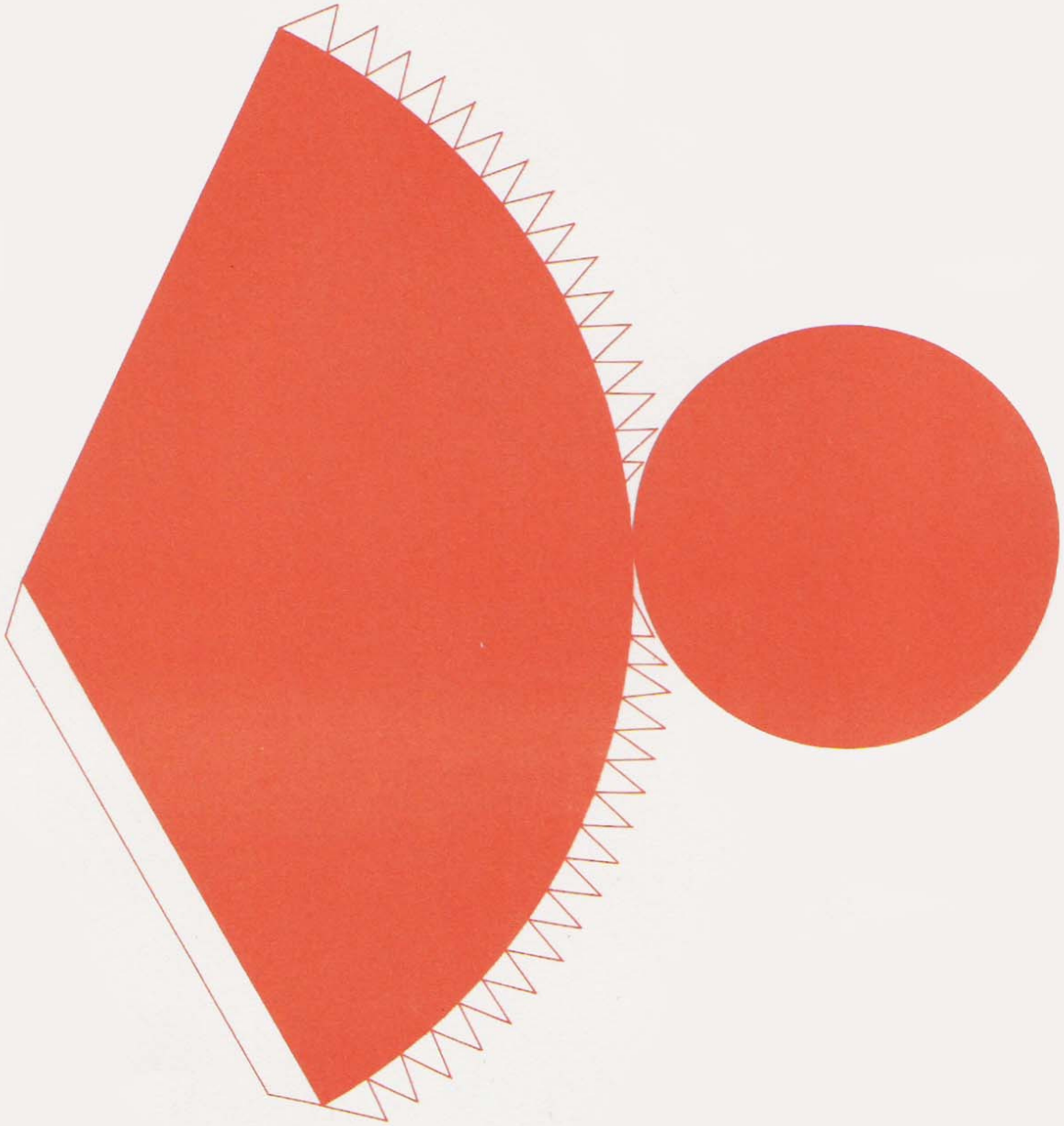


Disegnare il cerchio di base e suddividerlo in un numero qualsiasi di parti uguali (ad es. 12);
 prolungare il diametro e su di esso, con apertura del compasso pari alla generatrice VA, centrare il compasso e descrivere un arco di circonferenza;
 sull'arco descritto riportare le suddivisioni fatte sul cerchio di base.

La lunghezza dell'arco del settore circolare è, con questa costruzione, approssimata per difetto.

Per ottenere una maggiore precisione, si deve calcolare la lunghezza della circonferenza di base e dividerla in un numero di parti uguali e quindi riportarla sull'arco del settore circolare. Il risultato di questa operazione è migliore anche se non è perfetto: infatti hai riportato segmenti di retta su un arco di circonferenza riducendone, anche se di poco, la lunghezza.

Si può migliorare ulteriormente il risultato aumentando il numero delle suddivisioni del cerchio di base.

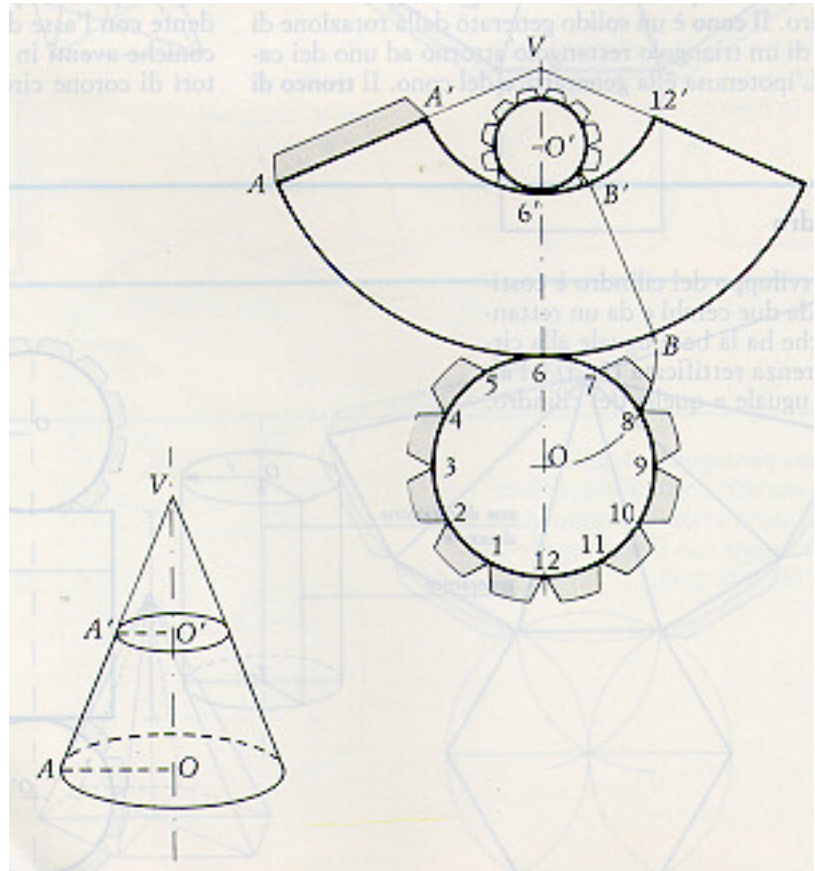


CONO

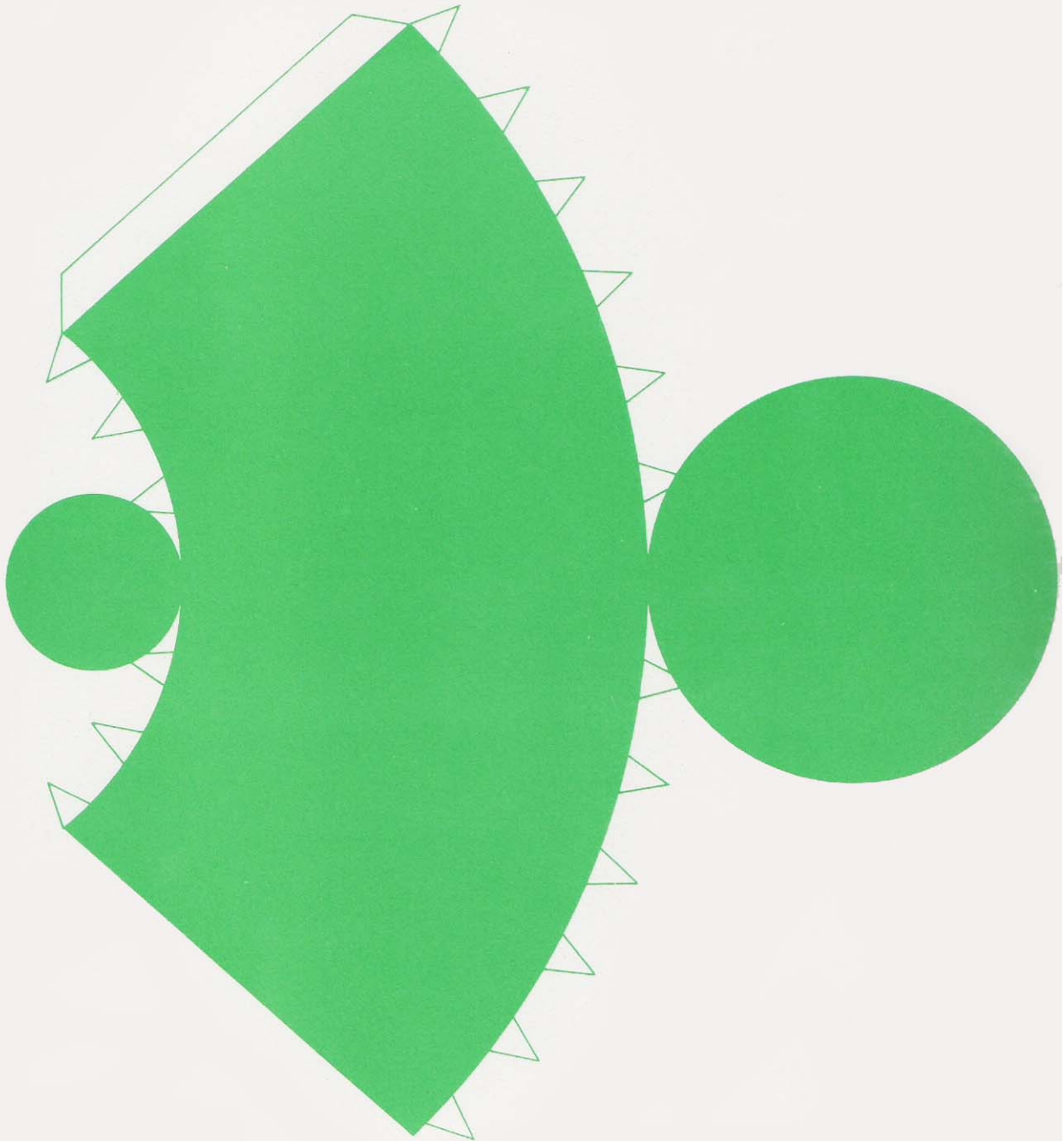
Tronco di Cono



Scultura di Arnaldo Pomodoro
Cono Tronco



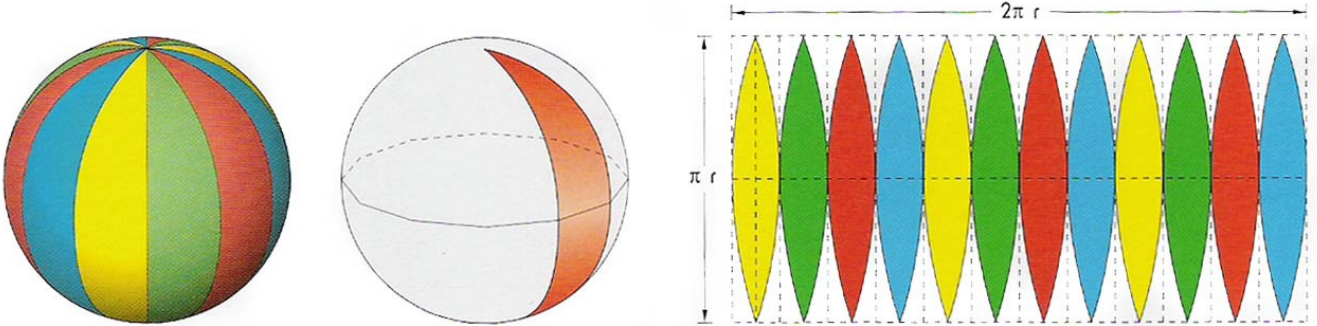
Disegna il cerchio di base e suddividilo in un numero qualsiasi di parti uguali (ad es. 12);
 prolunga il diametro e su di esso, con apertura del compasso pari alla generatrice VA , centra il compasso e descrivi un arco di circonferenza;
 sull'arco descritto riporta le suddivisioni fatte sul cerchio di base;
 con apertura del compasso uguale alla differenza tra la generatrice del cono e la generatrice del tronco di cono, centra il compasso in V e descrivi l'arco su cui riporterai le suddivisioni fatte come per il cerchio di base con raggio maggiore;
 con apertura $O6$ centra in 6 e descrivi l'arco che interseca l'arco della superficie laterale in B ;
 unisci B con V determinando B' ;
 con apertura $6'B'$ centra il compasso in $6'$ e descrivi un arco, determinando O' , centro del cerchio di base superiore.



TRONCO DI CONO

Sfera

La sfera, a differenza di un poliedro che può essere "tagliato" lungo gli spigoli fino a distenderlo su un piano, non ha spigoli e qualsiasi taglio permette di ottenere solo uno sviluppo approssimato. Tale sviluppo approssimato è ottenibile effettuando una suddivisione della superficie in spicchi, ciascuno dei quali risulta avere una altezza pari alla semicirconferenza (πr) mentre gli spicchi accostati daranno la lunghezza dell'intera circonferenza ($2\pi r$).



Esercizio:

La costruzione di un solido geometrico prevede due fasi: il disegno del suo sviluppo e la costruzione vera e propria.

Materiale:

strumenti da disegno;
cartoncino colorato;
taglierino;
colla a presa rapida.

Procedimento:

Disegna sul cartoncino lo sviluppo del solido, partendo da un angolo del foglio, per non sprecare troppo materiale. Le linee vanno tracciate con cura e con la massima precisione.

Disegna le linguette per incollare le facce, seguendo gli esempi.

Ritaglia il perimetro del solido sviluppato, usando preferibilmente un taglierino e una squadra; Esegui con il taglierino una leggera incisione lungo tutti gli spigoli interni. Servirà per agevolare la piegatura.

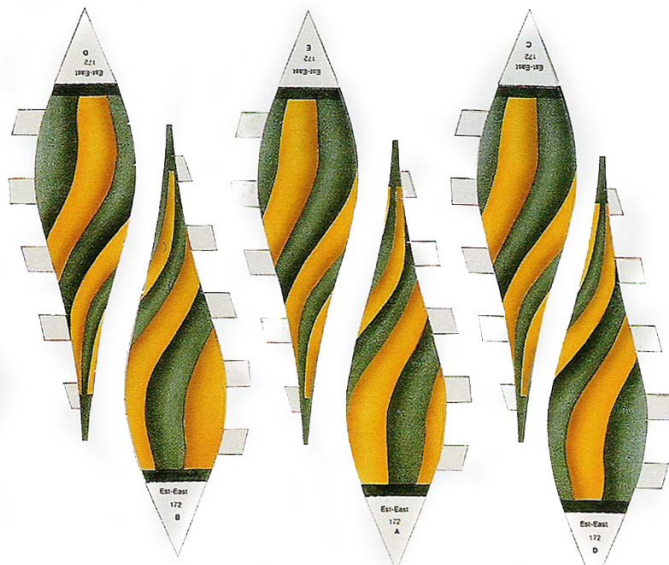
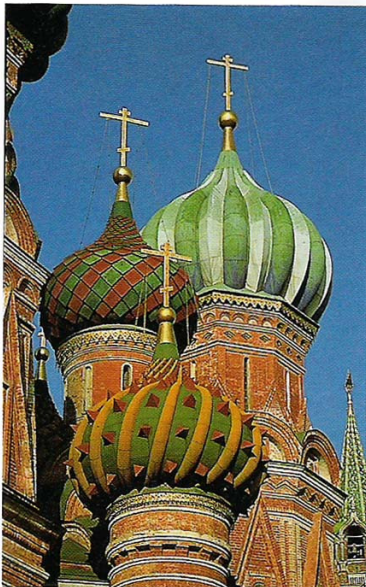
Piega con cura le facce, in modo da lasciare sull'esterno le linee di incisione.

Incolla una linguetta alla volta ed uniscila con la faccia accanto.

Disegna e costruisci con il cartoncino, lo sviluppo dei seguenti solidi:

- Cubo o Esaedro, con lo spigolo di 6cm;
- Parallelepipedo, con rettangolo di base 5cmx8cm e altezza 10cm;
- Prisma a base quadrata, con il lato di base di 6cm e l'altezza di 10cm;
- Prisma a base rettangolare, con il lato del triangolo equilatero di base di 8cm e altezza 10cm;
- Prisma a base pentagonale regolare, con pentagono inscritto ad una circonferenza di diametro di 8cm e altezza del solido di 12cm;
- Prisma a base esagonale regolare, con esagono inscritto ad una circonferenza di diametro di 8cm e altezza del solido di 10cm;
- Piramide a base quadrata, con lato della figura di base di 8cm e altezza del solido di 12cm;
- Tronco di piramide a base quadrata, con lato della figura di base di 10cm e dimensione dello spigolo della piramide da cui si ricava il tronco di 16cm e spigolo del tronco di 8cm;
- Cilindro, il cui diametro della circonferenza di base è di 8cm e l'altezza del solido di 12cm;
- Cono, con raggio della circonferenza di base di 5cm e apotema del solido di 15cm.

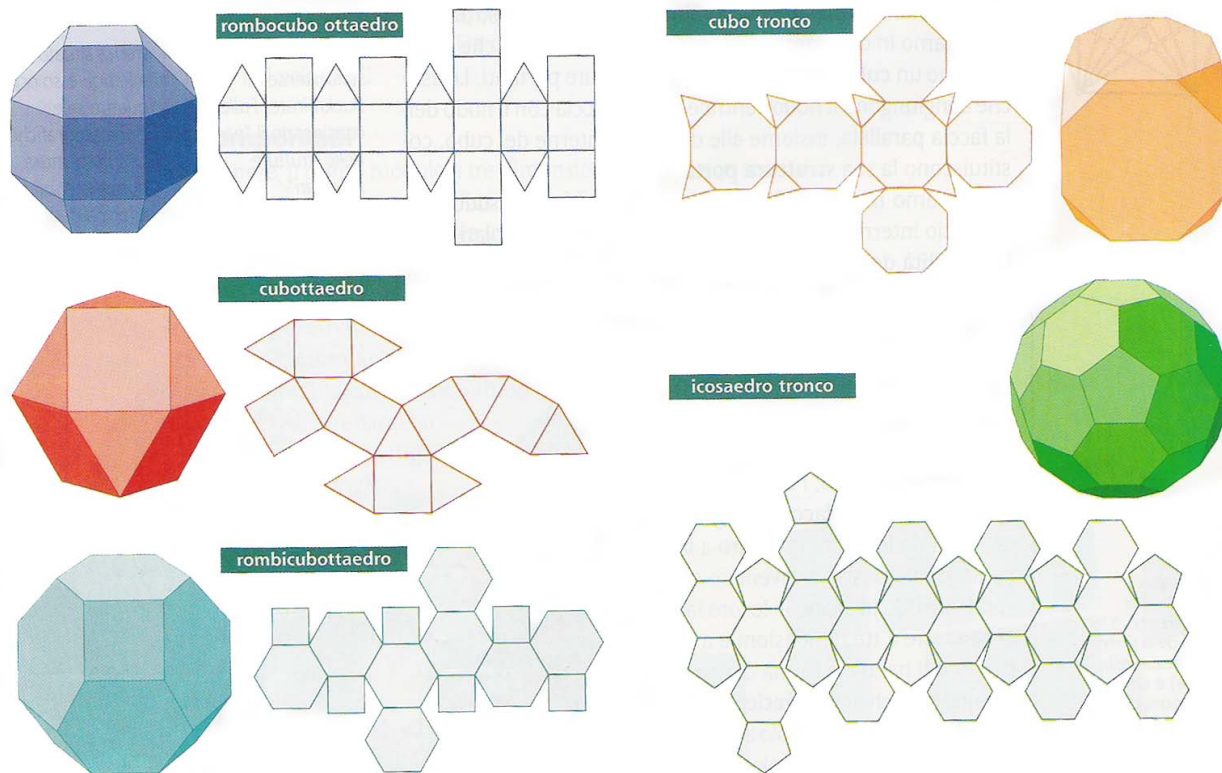
Esercizio. Indica, ricercandoli sui libri di geografia, edifici che hanno la forma dei solidi sviluppati.



Le guglie della cattedrale di San Basilio a Mosca. A destra lo sviluppo approssimato.

I poliedri semiregolari

I poliedri semiregolari, o *solidi archimedei*, sono tredici solidi formati da facce costituite da poligoni regolari, ma non tutti dello stesso tipo, ripetute molte volte. La loro caratteristica è che tutti i lati hanno la stessa lunghezza. Ne vediamo alcuni esempi.

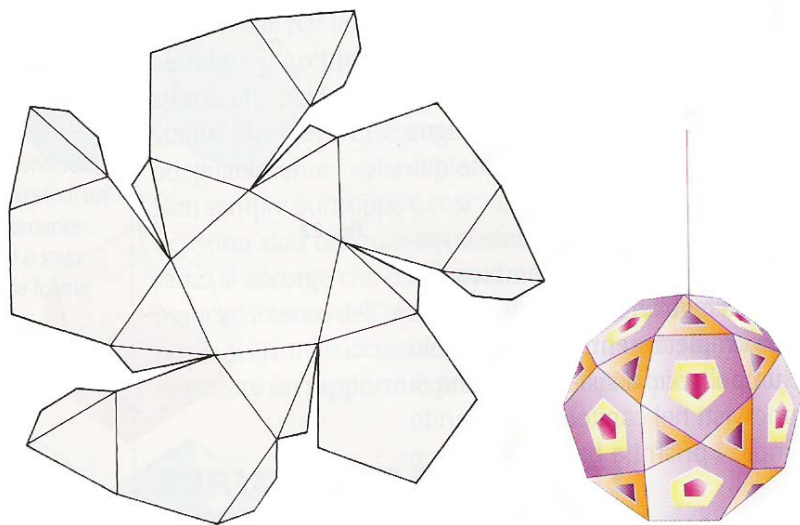


Un esempio di applicazione pratica dell'icosaedro troncato è il pallone da calcio.



Esercizio. Crea un lampadario di cartoncino

Un poliedro costruito con il cartoncino colorato può diventare una lampada, ma anche un addobbo per una festa. Puoi scegliere una carta colorata marmorizzata oppure spruzzare il poliedro con una vernice dorata o argentata.



Occorrente

cartoncino bianco o colorato
forbici o taglierino
colla per carta

Esecuzione

Riproduci sul cartoncino lo sviluppo. Per le facce applica le costruzioni geometriche dei poligoni dato il lato. Un metodo semplice è quello di disegnare e ritagliare da un cartoncino uno dei poligoni che costituiscono le facce del poliedro e usarlo come una sagoma di cui ricalcare i contorni.

Non dimenticare le linguette, larghe almeno 1 cm, con le quali potrai unire tra loro le facce.

Piega con precisione tutti gli spigoli, facendo attenzione che la traccia a matita rimanga all'interno. Incolla con cura le linguette al lato corrispondente dell'altro poligono e otterrai il poliedro.

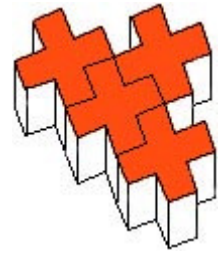
Se vuoi appendere il solido, prima di unire l'ultima faccia attacca all'interno un'asola di cordoncino con una graffetta.

Tassellazioni dello spazio

Una tassellazione dello spazio è un riempimento (rappresentato attraverso un suo frammento) dell'intero spazio, infinito, realizzato affiancando solidi geometrici in modo da non lasciare spazi vuoti.

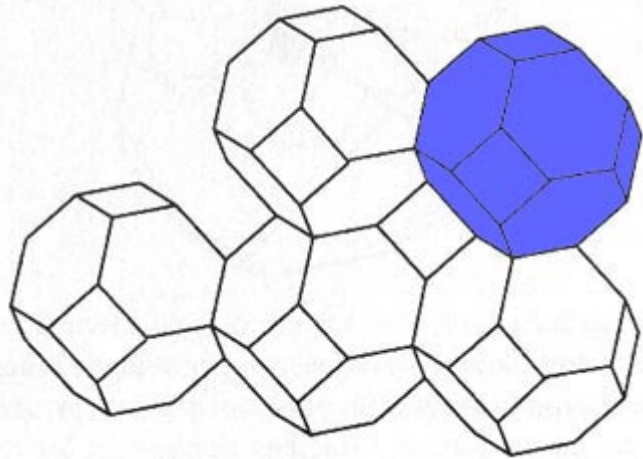
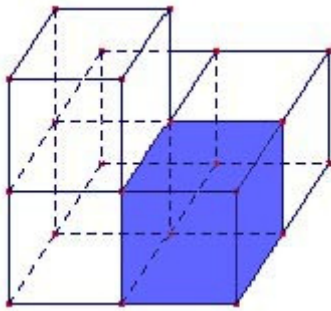
Una tassellazione è detta **regolare** se i suoi tasselli sono solidi tutti congruenti fra loro, disposti in modo che due solidi abbiano in comune al più un vertice, uno spigolo o una faccia, oppure spigoli o facce consecutive.

E' facile realizzare nello spazio tassellazioni regolari con prismi la cui base tassella il piano.

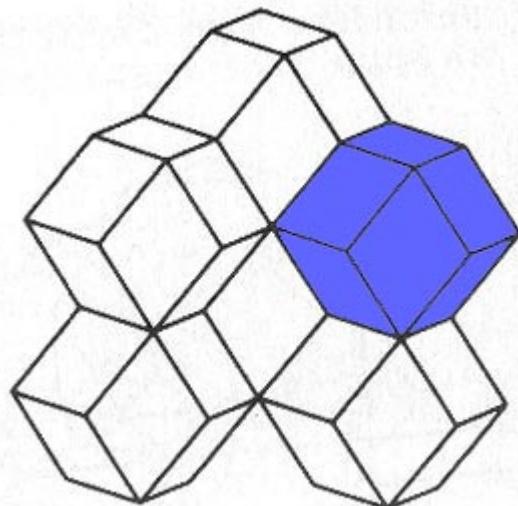
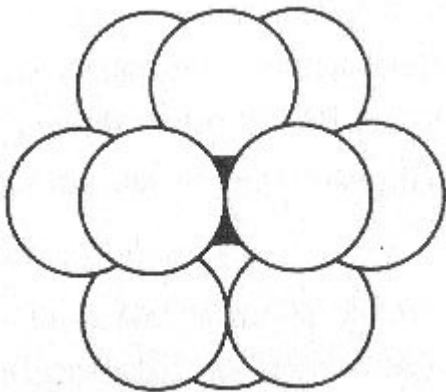


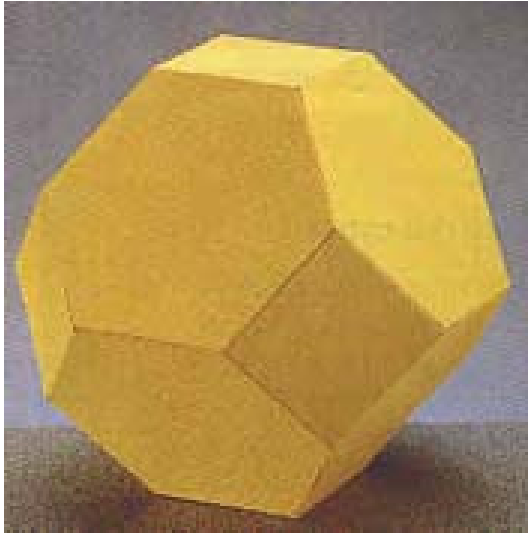
Tra i poliedri regolari, solidi platonici, riempiono completamente lo spazio solo quelli che hanno come basi un poligono: il cubo e i prismi a base esagonale e triangolare.

Tra i tredici poliedri semiregolari, solidi archimedei, soltanto l'ottaedro tronco ed il dodecaedro rombico (che ha 12 facce uguali, non regolari, a forma di rombo) permettono di tassellare lo spazio.

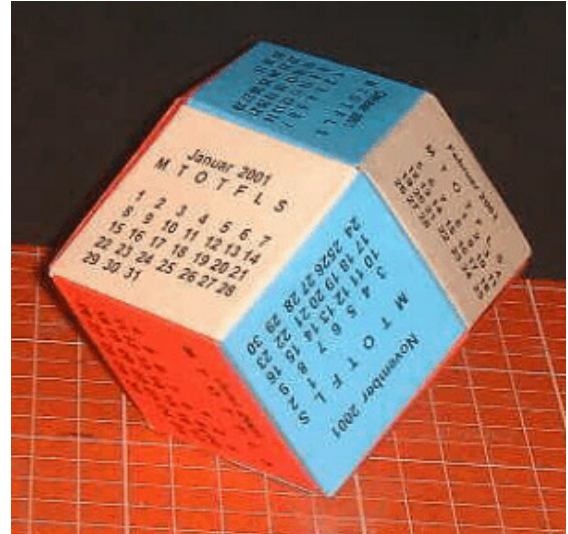


Particolarmente interessante è la tassellazione regolare realizzata con il dodecaedro rombico: è proprio la configurazione che assumerebbero delle sfere deformabili, collocate nello spazio secondo un impacchettamento ottimale, se compresse fino a non lasciare spazi vuoti.



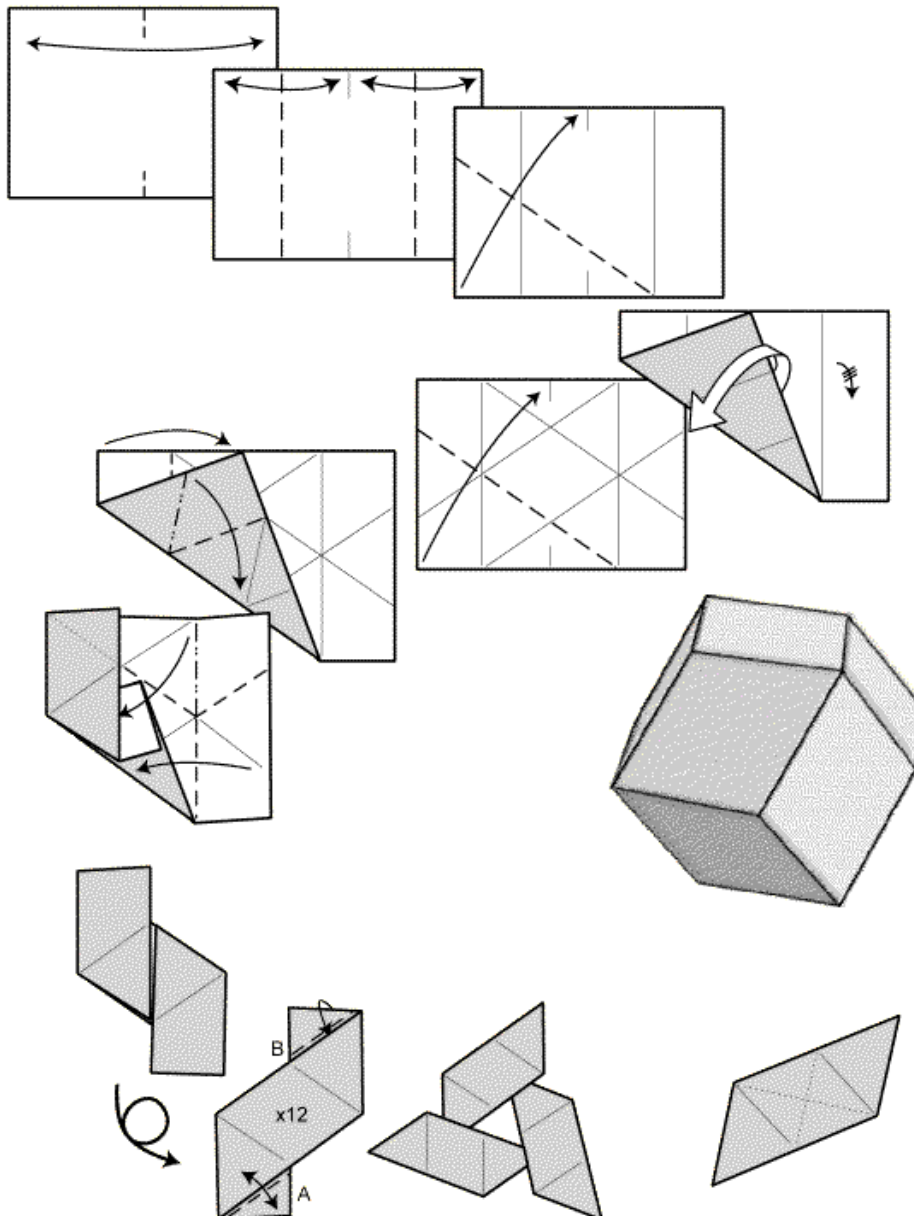


Ottaedro tronco



Dodecaedro rombico

Esercizio. Costruzione del dodecaedro rombico.



Esempi di **tassellazioni non regolari** sono quelli realizzati con tetraedri e ottaedri, oppure con cubi, ottaedri tronchi e cubottaedri tronchi.

Esercizio. Assembla i poliedri

Per verificare concretamente quali poliedri sono assemblabili, un metodo consiste nel realizzare plastici con il cartoncino. E' questo un lavoro da svolgere in gruppo, perché l'obiettivo è troppo impegnativo per un solo allievo.

Occorrente:

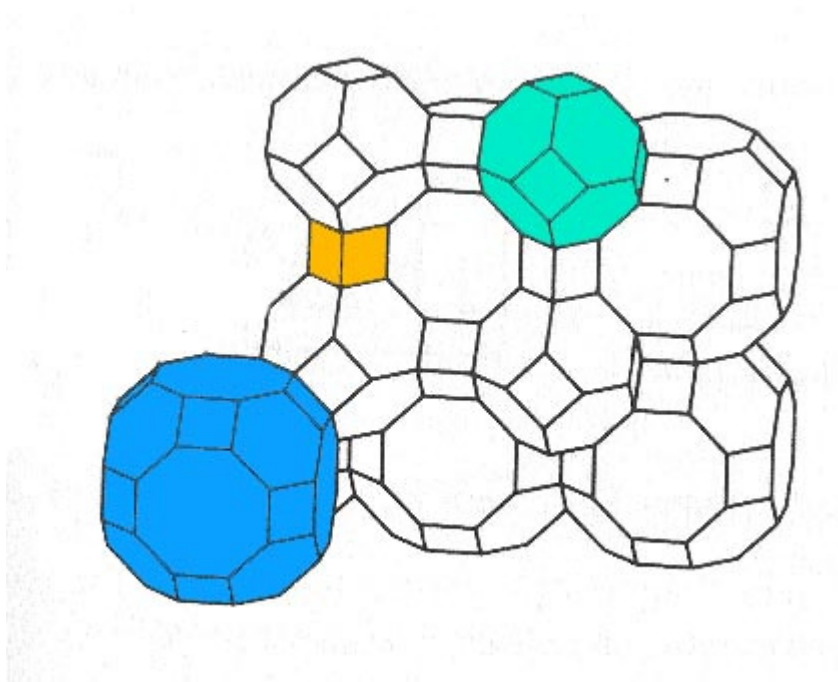
Cartoncini bianchi e colorati
Strumenti per il disegno tecnico
Taglierino e colla
Base in cartone pesante.

Esecuzione:

Ogni gruppo sceglie di realizzare con il cartoncino un poliedro semiregolare. Si devono costruire almeno una decina di modelli del poliedro prescelto.

Si incollano i solidi alla base del plastico, cercando di accostarli gli uni agli altri senza lasciare vuoti: quali hanno questa caratteristica?

Alcuni poliedri semiregolari, accostati gli uni agli altri, lasciano dei vuoti a forma poliedrica, diversa da quella dei poliedri utilizzati; costruendo questi solidi di risulta con cartoncini colorati di tinte contrastanti otterremo composizioni interessanti.



Abbiamo visto lo sviluppo di solidi, così come lo troviamo nei libri di geometria e che serve più a fare calcoli matematici sull'area totale o parziale delle figure che non a costruire in maniera pratica delle forme volumetriche.

Prova ad aprire e a spianare i contenitori (imballaggi) prodotti industrialmente: le scatole e gli astucci delle confezioni dei prodotti alimentari e farmaceutici, dei dentifrici, ecc.



Lo sviluppo di questi contenitori è forse uguale a quello tradizionale del parallelepipedo o del cubo che hai studiato in geometria?

No, perché nella fabbricazione in serie degli imballaggi occorre tener conto di ben precise necessità tecnico-economiche. Bisogna limitare al massimo lo spreco di materiale, affidando la produzione ed il riempimento dei contenitori a macchine capaci di operare in modo completamente automatico.

Il procedimento prende il nome di **fustellatura** e le fustellatrici sono le macchine usate per tagliare i contorni dello sviluppo, che prende il nome di fustellato.



Abbiamo imparato a conoscere qual è lo sviluppo di un parallelepipedo in geometria. Ma se, invece di considerare un parallelepipedo in astratto, prendiamo in considerazione oggetti reali, ad esempio contenitori a forma di parallelepipedo, ti sarà facile capire quali necessità funzionali, costruttive ed economiche, portano a ricercare sviluppi delle forme tridimensionali molto diversi da quelli studiati in geometria.

Esercizio. Compila per ogni contenitore a forma di parallelepipedo, una scheda in cui incollerai la foto ritagliata da un inserto pubblicitario e riprodotti il disegno del suo sviluppo, indicando con un tratto sottile le linee di piegatura.



Sviluppo della confezione di un rullino fotografico.



Sviluppo della confezione di un dentifricio

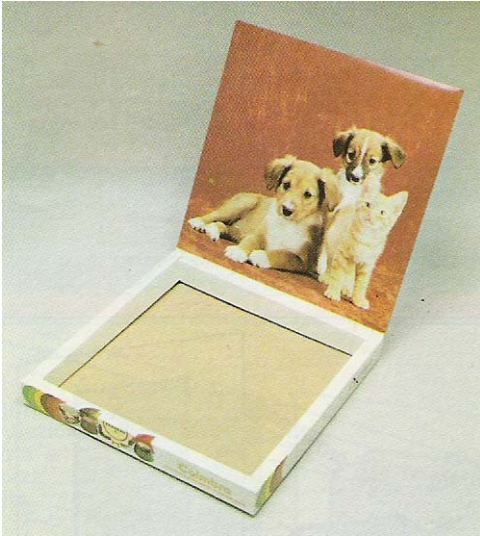


Sviluppo della confezione di un pasticcine

Alcune delle caratteristiche costanti che devono avere gli imballaggi prodotti industrialmente sono: sufficiente robustezza, ingombro ridotto e costo limitato. I diversi tipi di contenitori che troviamo in commercio possono essere così suddivisi:

- imballaggi di spedizione: contenitori destinati a consentire con facilità il trasporto della merce dal luogo di produzione al punto di vendita;
- imballaggi di conservazione: contenitori studiati in modo da permettere che i prodotti si conservino per periodi di tempo più o meno lunghi;
- imballaggi di presentazione: contenitori progettati per presentare in maniera attraente i prodotti invogliando il consumatore all'acquisto.

Analizziamo una comune scatola di cioccolatini.



Osservando lo sviluppo piano della scatola, noterai il grande numero di solchi che permettono numerose piegature.

Con questo metodo è possibile costruire un contenitore dotato delle seguenti caratteristiche:

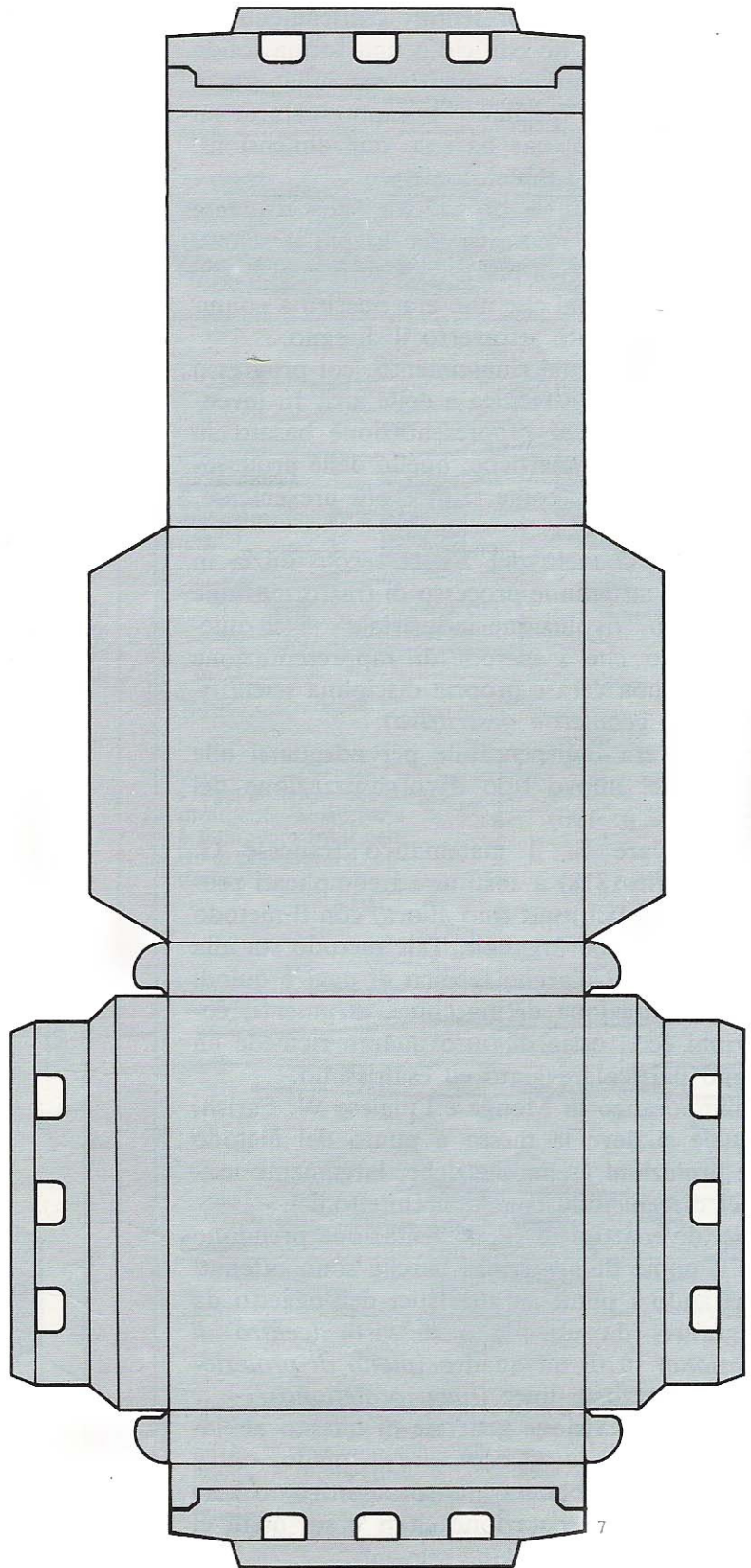
- robustezza della forma;
- stabilità del contenuto;
- protezione dagli sbalzi di temperatura;
- leggerezza.

Come si ottiene tutto questo?

Proprio con le piegature che permettono al cartoncino di:

- irrigidirsi (robustezza della forma e stabilità del contenuto);
- formare una camera d'aria all'interno dei bordi della scatola (protezione dagli sbalzi di temperatura).

E naturalmente, trattandosi di cartoncino, la scatola è leggera anche se offre tutte queste proprietà.



Esercizio. Realizzazione di una scatola per torte

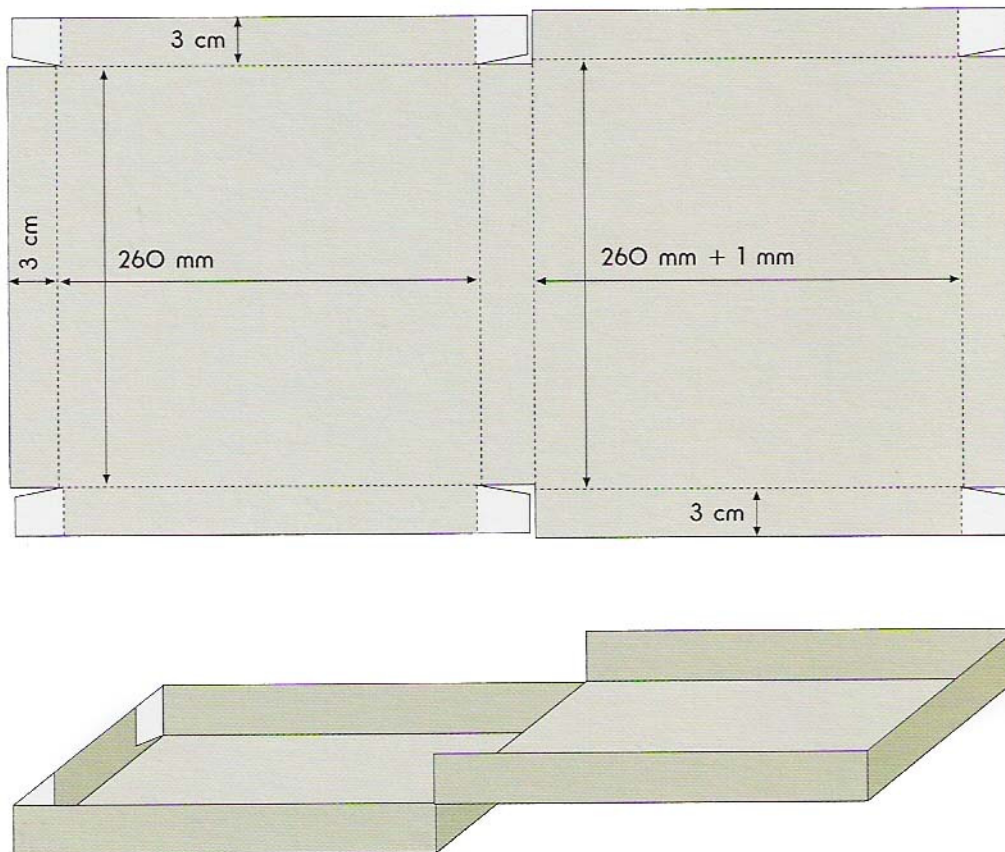
Un pasticciere ha commissionato le scatole per le sue torte. Le torte sono circolari, hanno un diametro di 25 cm e uno spessore di 2 cm; per evitare che la superficie della torta venga a contatto con il coperchio della scatola è necessario che quest'ultimo sia sollevato dalla torta di 1 cm e che tra ogni lato della scatola e il perimetro della torta rimanga uno spazio di 0,5 cm. Il materiale scelto è del cartone con spessore di 1 mm, adeguato a mantenere l'opportuna rigidità.

Scatola a base quadrata

Misure:

- . la misura dello spigolo di base è data dal diametro della torta sommato allo spazio "libero" tra questa e il bordo della scatola: $25\text{ cm} + 0,5\text{ cm} + 0,5\text{ cm} = 26\text{ cm}$;
- . l'altezza della scatola si calcola aggiungendo 1 cm a quella della torta, perché il coperchio rimanga sollevato: $2\text{ cm} + 1\text{ cm} = 3\text{ cm}$;
- . il coperchio è collegato al corpo della scatola e ha le misure della base incrementate di 1 mm.

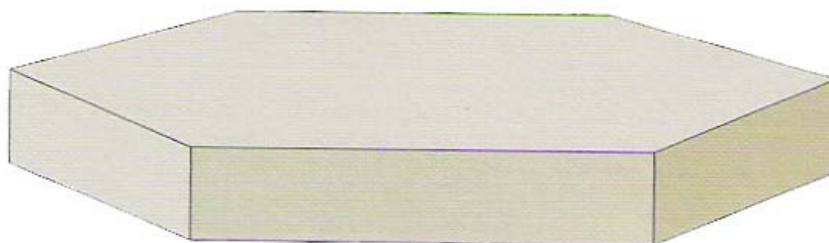
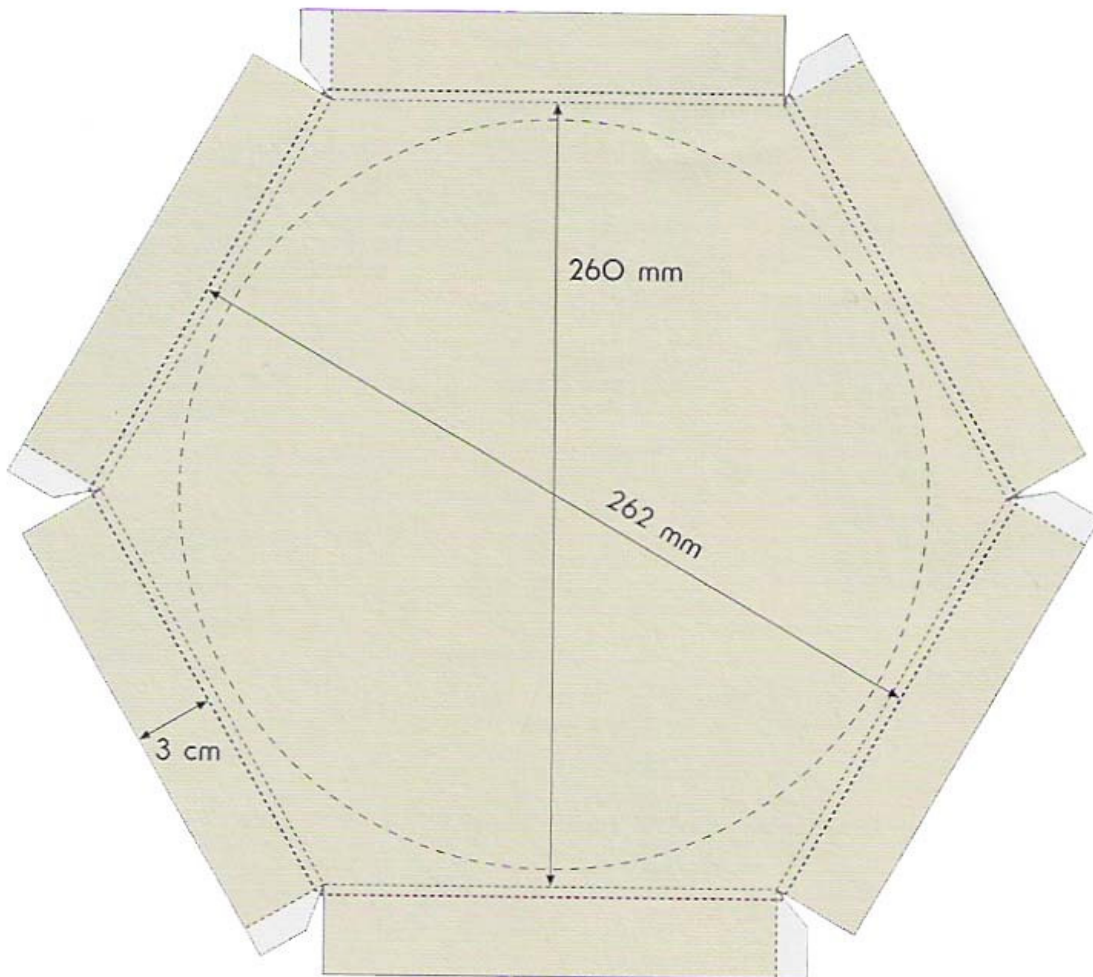
Disegna lo sviluppo secondo le dimensioni calcolate; ritaglia e ripiega seguendo le linee tracciate, avendo cura di incollare le linguette della scatola all'interno della stessa.

**Collaudo**

Come ogni prodotto, il prototipo di scatola deve essere adeguatamente collaudato prima di essere venduto, per avere la certezza che risponda alle caratteristiche richieste dal cliente. A questo scopo puoi chiedere ad un compagno/a di aprire e chiudere 3 o 4 volte la scatola e riferirti gli eventuali problemi.

Scatola a base esagonale

Procedi dalla costruzione dell'esagono regolare, sapendo che la scatola dovrà contenere la medesima torta. Progetta di realizzare separatamente scatola e coperchio (con coperchio maggiorato di 1 mm rispetto allo spessore del cartone). Applica, adattate al caso, le stesse avvertenze indicate nella realizzazione precedente.



Esercizio

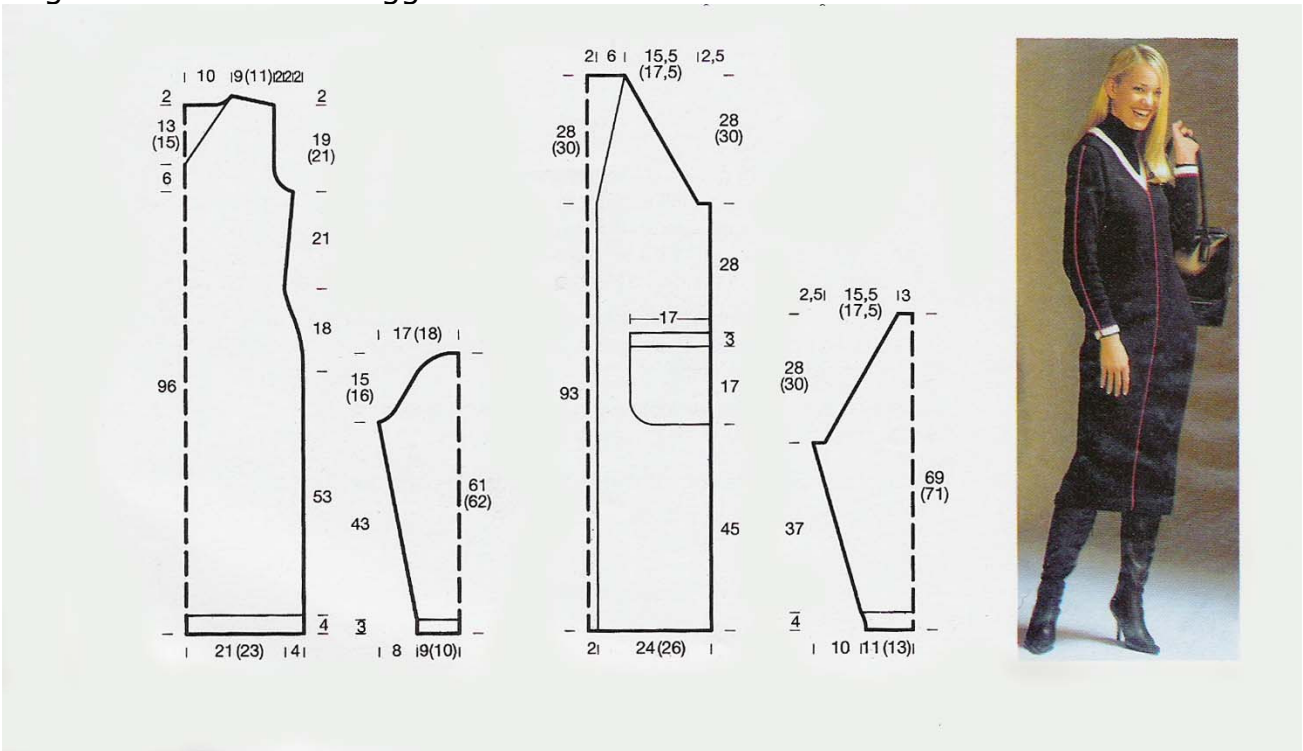
Un produttore di palline da tennis decide di rinnovare i contenitori per la vendita delle palline e commissiona dei contenitori cilindrici che possano contenere quattro palline ciascuno. Ponendo che il diametro di una pallina da tennis sia di 6 cm, progetta il contenitore con il metodo dello sviluppo, tenendo conto che:

- . le palline devono essere inserite ed estratte agevolmente (tra la superficie interna della scatola e le palline deve rimanere qualche millimetro di spazio libero);
- . il coperchio della scatola è costituito da un cilindro di 1 cm di altezza che, privo di una base, può essere inserito "a cappuccio".

Esercizio

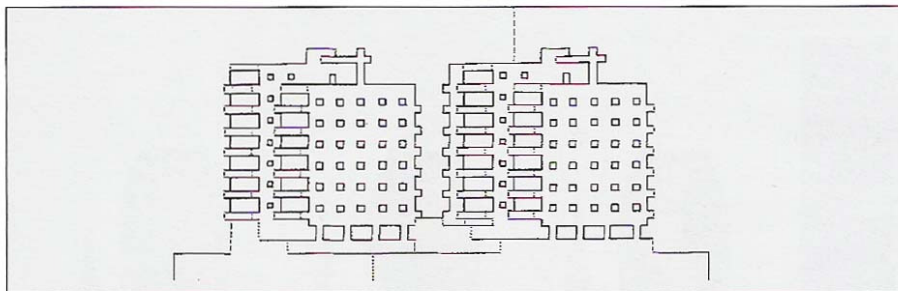
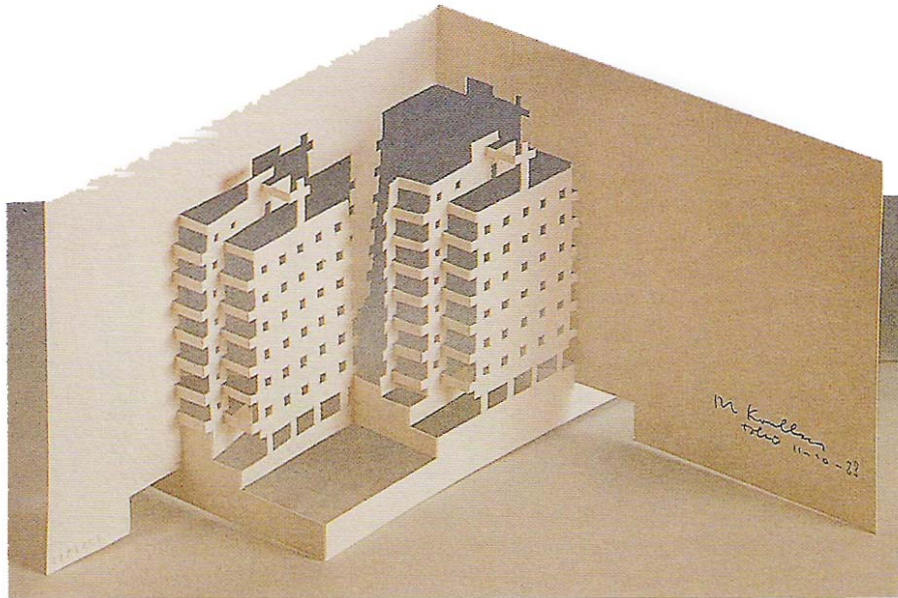
Realizza un contenitore di forma piramidale a base quadrata di lato 15 cm e alto 10 cm.

Interessanti applicazioni dello sviluppo dei solidi si hanno in molteplici campi: tra questi l'abbigliamento. Il disegno del modello su carta è infatti la rappresentazione in piano della parte di un oggetto che, congiunta, darà origine alla forma dell'oggetto: l'abito.



La stessa cosa può dirsi per le scarpe: la loro realizzazione avviene attraverso lo sviluppo su una superficie piana di ciò che, opportunamente assemblato, sarà poi la scarpa.

Un altro impiego dello sviluppo dei solidi riguarda la realizzazione di modelli in scala per la costruzione di plastici che descrivono edifici o manufatti da realizzare. È un impiego frequente in architettura perché il plastico offre il vantaggio di "mostrare" quale può essere il risultato di un progetto, di tradurre in modo tridimensionale, quindi visibile ed efficace per tutti, ciò che in un disegno tecnico è significativo solo per coloro che sanno interpretarlo.



Un altro modo per ottenere oggetti tridimensionali a partire da una superficie piana è la tecnica *pop up* ("salta su"), che, attraverso pieghe e intagli operati su un disegno, permette di comunicare un'impressione di profondità, a volte con effetti molto suggestivi.

